EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0, 1, 2, ...\}$. Znamy wartości dystrybuanty $F_1(x) = P(X_1 \leq x)$ oraz $F_S(x) = P(X_1 + X_2 \leq x)$:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.12
1	0.8	0.46
2	0.9	0.58
3	1	0.83

Wylicz $P(X_2 = 2)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Dla 20-latka wystawiono ubezpieczenie wypłacające S PLN jeśli będzie on żył po dwóch latach od chwili zawarcia umowy. Składki płacone są w dwóch równych ratach na początku każdego roku trwania umowy. Znajdź rezerwę składki netto na koniec pierwszego roku. Przyjmij, że $p_{20} = a$, ${}_2p_{20} = b$ oraz że czynnik dyskonta w każdym roku jest równy v. Jeśli będzie to konieczne to możesz założyć, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji. Uprość otrzymane wyrażenie do najprostszej możliwej postaci.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathrm{E}X = a$, $\mathrm{E}Y = b$, oraz $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \sigma^2$.

(i) Podaj definicję estymatora nieobciążonego.

(ii) Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1 - c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?

(iii) Jaka jest wartość stałej c gdy $a = 1$ i $b = 3$?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \leq r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.

2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że
$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$

3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku O. Udowodnić, że

$$2\measuredangle AOB + \measuredangle A + \measuredangle B = 360^\circ, \qquad 2\measuredangle COD + \measuredangle C + \measuredangle D = 360^\circ,$$

oraz że

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz ostatnią cyfrę liczby 777^{333}.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathrm{E}X = a$, $\mathrm{E}Y = b$, oraz $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \sigma^2$.

(i) Podaj definicję estymatora nieobciążonego.

(ii) Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1-c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?

(iii) Jaka jest wartość stałej c gdy $a = 1$ i $b = 3$?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \le r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.

2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że

$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$

3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie mają funkcję charakterystyczną
$$\phi(t) = e^{-|t|^\alpha},$$
gdzie $\alpha \in (0,2)$. Niech
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$
Czy istnieje granica według rozkładu Y_n, gdy $n \to \infty$? Zanalizować 3 możliwe scenariusze w zależności od α. Uzasadnić kroki odpowiednimi twierdzeniami.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech $B_t = (b_t, \beta_t)$ będzie 2-wymiarowym ruchem Browna. Dla jakich wartości $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ proces $X_t = \lambda b_t + \mu\beta_t$ jest ruchem Browna?

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x,\theta) = \theta^2 x \exp\{-\theta x\}$, $x > 0$, $\theta > 0$. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru θ.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \le r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.

2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że
$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$

3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozpatrzmy chorobę, której przebieg prowadzi do podziału populacji na trzy różne grupy: grupę osobników podatnych S, czyli takich którzy mogą zachorować; zainfekowanych I, którzy chorują i zarażają oraz grupę odpornych R, czyli takich, którzy wyzdrowieli i są odporni. Przejścia między grupami są opisane przez schemat

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R.$$

Zakładamy, że każda para osobników ma taką samą szansę bezpośredniego kontaktu co oznacza, że przyrost liczby osobników zainfekowanych jest proporcjonalny do liczby zarówno osobników zainfekowanych jak i podatnych czyli rIS, gdzie $r > 0$ jest stałym parametrem. Liczba podatnych ubywa w ten sam sposób. Współczynnik zdrowienia z infekcji i przechodzenia do grupy odpornych jest proporcjonalny do liczby zainfekowanych, czyli aI, gdzie $a > 0$ jest stałą. Zakładamy, że czynniki demograficzne nie grają roli, czyli zakładamy stałą wielkość populacji. Model ten w epidemiologii nosi nazwę **modelu SIR**.

(i) Dla tak opisanego modelu napisz układ równań różniczkowych określający liczbę osobników, w każdej z grup, w chwili t.

(ii) Określ dla jakich wartości parametrów modelu infekcja wygaśnie, czyli

$$I(0) > I(t) \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

(iii) Dla jakiego układu parametrów tego modelu wystąpi zjawisko epidemii, czyli

$$I(t) > I(0) \quad \text{dla pewnego } \ t > 0.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Począwszy od 6 rano klienci zgłaszają się do centrum obsługi klientów *"W czym mogę pomóc"* zgodnie z procesem Poissona, w tempie 30 klientów na godzinę.

(i) Znajdź prawdopodobieństwo, że więcej niż 65 klientów przybędzie od 9 do 11 rano.

Od godziny 10 kierownik centrum obsługi klientów *"W czym mogę pomóc"* otrzymuje SMS-y z pretensjami od klientów, zgodnie z procesem Poissona z szybkością 10 SMS-ów na godzinę.

(ii) Znajdź prawdopodobieństwo, że kierownik otrzyma dokładnie 18 SMS-ów do południa i 70 SMS-ów do 17:00.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathrm{E}X = a$, $\mathrm{E}Y = b$, oraz $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \sigma^2$.

(i) Podaj definicję estymatora nieobciążonego.

(ii) Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1-c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?

(iii) Jaka jest wartość stałej c gdy $a = 1$ i $b = 3$?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \leq r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.
2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że
$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$
3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Przypomnijmy, że dla grupy G, elementu $g \in G$ i podzbioru $A \subseteq G$ *centralizator* g w G to zbiór $C_G(g) := \{h \in G : gh = hg\}$, a *centralizator* A w G to zbiór $C_G(A) := \{h \in G : (\forall a \in A)(ah = ha)\}$.

1. (1pkt) Niech G będzie dowolną grupą. Podać definicję centrum grupy G, oznaczanego przez $Z(G)$.
2. (2pkt) Niech H będzie abelową podgrupą grupy G. Dowieść, że $Z(C_G(H)) = C_G(C_G(H))$.
3. (3pkt) Niech H będzie abelową podgrupą skończonego indeksu grupy G. Dowieść, że istnieje abelowa podgrupa K grupy G zawierająca H, która jest przekrojem skończenie wielu centralizatorów elementów grupy G.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Dziecko wzięło drewnianą kulkę, pobawiło się nią, a następnie odłożyło na to samo miejsce. Udowodnij, że przynajmniej jeden punkt na powierzchni kulki znalazł się dokładnie tam, gdzie był przed zabawą.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że mamy szachownicę rozmiaru 10×10.

(a) Uzasadnij, że z każdego ustawienia 41 wież na tej szachownicy zawsze można wybrać pięć takich wież, które nie zagrażają sobie nawzajem.

(b) Uzasadnij, że 41 jest najmniejszą liczbą o takiej własności.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1] \colon f(x) \le r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.

2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że
$$\lambda(\{x \in [0,1] \colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$

3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2020r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X o rozkładzie Poissona z parametrem λ.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozważamy problem testowania zbioru m hipotez $\{(H_0^1, H_1^1), \ldots, (H_0^m, H_1^m)\}$. Zdefiniuj: FDR i $FWER$. Kiedy $FWER$ nie przekracza FDR? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathrm{E}X = a$, $\mathrm{E}Y = b$, oraz $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \sigma^2$.

(i) Podaj definicję estymatora nieobciążonego.

(ii) Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1-c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?

(iii) Jaka jest wartość stałej c gdy $a = 1$ i $b = 3$?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Niech λ będzie miarą Lebesgue'a określoną na σ-ciele podzbiorów borelowskich $[0,1]$. Przypomnijmy, że o funkcji borelowskiej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i liczbie r powiemy, że $f > r$ prawie wszędzie, jeśli $\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \leq r\}) = 0$.

1. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f > 0$ prawie wszędzie, ale nie istnieje liczba naturalna n taka, że $f(x) > \frac{1}{n}$ prawie wszędzie.

2. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że
$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) > \frac{1}{n}\}) > 1 - \varepsilon.$$

3. Pokaż, że jeżeli $f > 0$ prawie wszędzie, to
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadać dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ szereg potęgowy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ jest:

1. zbieżny absolutnie;
2. zbieżny, ale nie absolutnie;
3. rozbieżny.