1. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(0,1)=$ .... **b)** $C(1,3)=$ ....

c) $C(2,3)=$ .... **d)** $C(0,2)=$ ....

2. Podać kresy zbioru Z, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $Z=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\wedge 4^n\cdot n^m<m^m<27^n\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=$ .... $\sup Z=$ ....

b) $Z=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^{n^2}<3^{m^2}<81^{n^2}\right\}$

$\inf Z=$ .... $\sup Z=$ ....

c) $Z=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^n<3^m<81^n\right\}$

$\inf Z=$ .... $\sup Z=$ ....

d) $Z=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9n^2<m^2<81n^2\right\}$

$\inf Z=$ .... $\sup Z=$ ....

3. Podać sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)=$ .... **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}\right)=$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9}-\sqrt[n+2]{9}\right)=$ .... **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n+2]{4}\right)=$ ....

4. Podać zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\log_x 64 < -6$ ....

b) $\log_x 64 > 3$ ....

c) $\log_x 64 > -1$ ....

d) $\log_x 64 < 2$ ....

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podane wyrażenie przyjmuje tylko wartości nieujemne przy $x,y\in\mathbb{R}$. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $x^2+2xy+py^2$, ...

b) $x^2+6xy+py^2$, ...

c) $x^2+4xy+py^2$, ...

d) $x^2+8xy+py^2$, ...

6. Niech $z=1-i$. Podać w postaci kartezjańskiej:

a) $z^{10}=$ .... **b)** $z^9=$ ....

c) $z^7=$ .... **d)** $z^8=$ ....

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$ .... **b)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ .... **d)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$ ....

8. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 13 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 11 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo p. Dla podanej liczby pierwszej p podać element odwrotny do 3.

a) $p=19$, ... **b)** $p=13$, ...

c) $p=11$, ... **d)** $p=17$, ...

10. Dla podanej liczby n podać liczbę elementów rzędu n w grupie permutacji S_n.

a) $n=7$, ... **b)** $n=5$, ...

c) $n=3$, ... **d)** $n=4$, ...

11. Rzucamy czterema kostkami do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego lub w postaci ułamka o mianowniku $6^4=1296$:

a) $P(21)=$ .... **b)** $P(24)=$ ....

c) $P(23)=$ .... **d)** $P(22)=$ ....

12. Mamy 4 kule z kolejnymi numerami 1, 2, 3, 4 oraz dwie urny. Do jednej urny wkładamy kulę z numerem n, a do drugiej pozostałe 3 kule. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy kulę z wybranej urny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby napisanej na wylosowanej kuli. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(2)=$ .... **b)** $E(3)=$ ....

c) $E(4)=$ .... **d)** $E(1)=$ ....