EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
12 lutego 2020 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n \cdot x^{n^2}}{n^{n^2}}\,.$$

Czy szereg jest zbieżny dla $x=2$? A dla $x=3$?

Zadanie **2.** Funkcja $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{1+5x^4}$. Dowieść, że dla każdych $x,y\in[-2,2]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{40}{27}\cdot|x-y|\,.$$

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x''(t)-x'(t)-2x(t)=10e^{4t},\qquad x(0)=1,\qquad x'(0)=4.$$

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz A rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych, że

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad\text{oraz}\qquad A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Zadanie **5.** W grupie nieabelowej element a ma rząd 2, a element b ma rząd 30. Wyznaczyć rząd elementu ab^3a.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się $n\geqslant 2$ kul z kolejnymi liczbami od 0 do $n-1$. Losujemy (bez zwracania) dwie kule. Niech E_n będzie wartością oczekiwaną większej z liczb napisanych na wylosowanych kulach. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}\,.$$