EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2020r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech dla $t \geq 0$, $R(t) := u + 2t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $u \geq 0$, gdzie (X_i) iid oraz $(N(t), t \geq 0)$ jest procesem Poissona z intensywnością 2. Niech $\psi(u) = P(T < \infty)$ będzie prawdopodobieństwem ruiny, gdzie $T = \inf\{t : R(t) < 0\}$. Szkody X_i mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 3/4. Wylicz prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u)$, przy kapitale początkowym $u = 0$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz jednorazową składkę netto dla następującej renty dla 35-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 2000, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 4000, jeśli żyje on pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 8000. Obliczenia wykonaj dla $v = 0.9$, zakładając ponadto, że

$$q_{35} = 0.1, \ {}_{1|1}q_{35} = 0.3, \ {}_{2|1}q_{35} = 0.2.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}.$$

Pokaż, że

(i) estymator $T_n(\mathbf{X}) = n \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru λ,

(ii) ciąg estymatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nie jest zgodny**.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$I = \int_\Gamma \frac{\sin^2 z}{z^2 + 1} \, dz,$$

jeśli Γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez zera mianownika funkcji podcałkowej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (1) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \, d\lambda.$$
- (2) Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- (3) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2020r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest kwadrat o wierzchołkach A, B, C, D, punkt K jest środkiem boku AB, a punkt L leży na przekątnej AC, przy czym $AL = 3CL$. Niech M i N będą rzutami prostopadłymi punktu L na boki AB i AD odpowiednio. Udowodnij, że $KM = MB = ND$, $LK = LB = LD$ oraz że kąt $\measuredangle KLD$ jest prosty.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^3(-1)^k = \frac{1 + (4n^3 + 6n^2 - 1)\,(-1)^n}{8}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}.$$

Pokaż, że

(i) estymator $T_n(\mathbf{X}) = n \min\{X_1,\, X_2, ..., X_n\}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru λ,

(ii) ciąg estymatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nie jest zgodny**.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\sin^2 z}{z^2 + 1}\, dz,$$

jeśli Γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez zera mianownika funkcji podcałkowej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (2 pkt.) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0,2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \, d\lambda.$$
- (3 pkt.) Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- (3 pkt.) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2020r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech dla każdego n zmienne $\xi_{n,j}, j = 1, \ldots, n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $[-n.n]$. Zdefiniujmy indykatorowe zmienne trafień w odcinek $(a, b) \subset [-n, n]$, gdzie $a < b$

$$I_{nj} = \mathbf{1}(\xi_{nj} \in (a, b)), \qquad j = 1, \ldots, n$$

oraz liczbę trafień

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_{nj}.$$

a) (2 pkt) Oblicz średnią i wariancję S_n.
b) (6 pkt) Udowodnić z powołaniem się na twierdzenia, że S_n zbiega do rozkładu Poissona z parametrem λ. Ile wynosi λ?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu $N(0, \sigma^2)$. Wyznacz test jednostajnie najmocniejszy, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, w problemie testowania

$$H_0 : \sigma = 1;$$

$$H_1 : \sigma = 2.$$

Jaka jest moc testu przy alternatywie?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\sin^2 z}{z^2 + 1} \, dz,$$

jeśli Γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez zera mianownika funkcji podcałkowej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (1) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \; d\lambda.$$
- (2) Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- (3) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \; d\lambda = \int g \; d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2020r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Równanie

$$\frac{dV}{dt} = \alpha(t)V^{2/3} - \beta(t)V$$

opisuje wzrost objętości komórek. W tym przypadku zakładamy, że ilość dostarczanego pożywienia jest proporcjonalna do powierzchni komórki $S \sim V^{2/3}$, zaś szybkość jego zużycia proporcjonalna do objętości. Funkcje $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ pełnią rolę odpowiednich współczynników. Sprawdzić, że jeśli w tym modelu funkcje $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ są stałe, to spełnione jest następujące prawo von Bertalanffiego stwierdzające, że funkcja $L(t)$ opisująca zmianę rozmiaru liniowego wzrastającej komórki spełnia równanie

$$\frac{dL}{dt} = r(L_\infty - L(t)),$$

gdzie stałe r i L_∞, opisujące współczynnik wzrostu i maksymalny rozmiar liniowy komórki, nie zależą od $L(0)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozważmy łańcuch Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść postaci:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Czy ten łańcuch Markowa jest nieredukowalny?

(ii) Czy jest okresowy?

(iii) Wyznacz macierz, która jest granicą ciągu macierzy $\{\mathbf{P}^n\}_{n=1}^\infty$, gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}.$$

Pokaż, że

(i) estymator $T_n(\mathbf{X}) = n \min\{X_1,\ X_2, ..., X_n\}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru λ,

(ii) ciąg estymatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nie jest zgodny**.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\sin^2 z}{z^2+1}\, dz,$$

jeśli Γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez zera mianownika funkcji podcałkowej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (2 pkt.) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f\ d\lambda.$$
- (3 pkt.) Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- (3 pkt.) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f\ d\lambda = \int g\ d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2020r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X ma rozkład gamma z parametrami α i β. Wyznacz EX^k dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $VarX$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ będą m-wymiarowymi niezależnymi wektorami losowymi, $n > m$, pochodzącymi z m-wymiarowego rozkładu normalnego z wektorem wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ i jednostkową macierzą kowariancji $\boldsymbol{I}$. Wyznacz estymator największej wiarogodności $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ wektora wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}.$$

Pokaż, że

(i) estymator $T_n(\mathbf{X}) = n \min\{X_1,\ X_2, ..., X_n\}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru λ,

(ii) ciąg estymatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nie jest zgodny**.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$I = \int_\Gamma \frac{\sin^2 z}{z^2 + 1}\, dz,$$

jeśli Γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez zera mianownika funkcji podcałkowej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- (2 pkt.) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \, d\lambda.$$
- (3 pkt.) Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- (3 pkt.) Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.