EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
17 września 2019 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 111^n}{n^2+111} \cdot x^n .$$

Pamiętaj: Rozstrzygnięcie zbieżności na końcach przedziału jest istotną częścią zadania.

Zadanie **2.** Obliczyć całkę

$$\int_{-3}^{3} \int_{\sqrt{3}\cdot|x|}^{\sqrt{36-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx .$$

Zadanie **3.** Rozwiązać równanie

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = b$$

w zależności od parametru $b \in [0,1]$.

Zadanie **4.** Udowodnić istnienie takich macierzy kwadratowych A i B rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych, że

$$A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$(AB)^n \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dla każdej liczby całkowitej dodatniej } n .$$

Zadanie **5.** Dana jest skończona grupa nieabelowa G oraz takie jej elementy a, b, że:

- rząd elementu a jest równy 3,
- element b nie jest elementem neutralnym,
- rząd elementu b jest liczbą nieparzystą,
- zachodzi równość $ba = ab^5$.

Wyznaczyć rząd elementu b.

Zadanie **6.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Mamy dwie urny z kulami:

- w pierwszej urnie jest $n+1$ kul z kolejnymi liczbami od 0 do n,
- w drugiej urnie jest n kul: dwie kule białe i $n-2$ kule czarne.

Losujemy kulę z pierwszej urny. Niech k będzie liczbą znajdującą się na wylosowanej kuli. Następnie losujemy (bez zwracania) k kul z drugiej urny. Wyznaczyć (w zależności od n) prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul znalazły się obie kule białe.

Rozwiązanie częściowe za $\mathbf{1_{n=2}+3_{n=3}+5_{n=4}+3_{hipoteza}=12}$ **punktów**:
Jeśli nie umiesz rozwiązać zadania dla dowolnego n, rozwiąż je dla $n=2$, $n=3$, $n=4$ oraz sformułuj hipotezę, jaka jest odpowiedź dla dowolnego n.