1. Podać **w uproszczonej postaci** wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln 2}$

b) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \mathbf{1/2}$

c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} = \mathbf{3/8}$

d) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \mathbf{7/24}$

2. Podać wartość granicy ciągu.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n+5}{6n+1}\right)^n = \mathbf{e^{2/3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathbf{e}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{1/e}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \mathbf{e^3}$

3. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-20} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/7}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-20} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/5}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-111} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/14}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-111} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/10}$

4. Podać największą wartość funkcji f na okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$.

a) $f(x,y)=4x+5y$, $\boldsymbol{\sqrt{41}}$

b) $f(x,y)=x+2y$, $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

c) $f(x,y)=2x+3y$, $\boldsymbol{\sqrt{13}}$

d) $f(x,y)=3x+4y$, **5**

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(2,+\infty)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(3,+\infty)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(4,+\infty)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(6,+\infty)}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{3/5}$

b) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{15}/4}$

c) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{5}/3}$

d) $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{4/5}$

7. Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ jest równy 10. Podać wyznacznik podanej macierzy.

a) $\det\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{pmatrix} = \mathbf{40}$ **b)** $\det\begin{pmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{pmatrix} = \mathbf{60}$

c) $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \mathbf{270}$ **d)** $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{80}$

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 1.

a) $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 6 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-10/3}$ $b = \mathbf{-4}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-3/2}$ $b = \mathbf{-2}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-2/3}$ $b = \mathbf{-1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{0}$ $b = \mathbf{0}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 27, 28, 29\}$, natomiast działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g.

a) $g = 27$, **10** **b)** $g = 25$, **6**

c) $g = 24$, **5** **d)** $g = 26$, **15**

10. Dla podanej liczby n podać największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $n=10$, $k=\mathbf{30}$

b) $n=8$, $k=\mathbf{15}$

c) $n=5$, $k=\mathbf{6}$

d) $n=7$, $k=\mathbf{12}$

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{11/36}$

b) $P(2)=\mathbf{3/4}$

c) $P(3)=\mathbf{5/9}$

d) $P(4)=\mathbf{5/12}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/27}$

b) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=2/3$, $P(B\cap C)=1/3$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/3}$

c) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/12}$

d) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/2$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/4}$

1. Podać **w uproszczonej postaci** wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} = \mathbf{3/8}$

b) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \mathbf{1/2}$

c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \mathbf{ln\,2}$

d) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \mathbf{7/24}$

2. Podać wartość granicy ciągu.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \mathbf{e^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{1/e}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n+5}{6n+1}\right)^n = \mathbf{e^{2/3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathbf{e}}$

3. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-111} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/14}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-20} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/7}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-20} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/5}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-111} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/10}$

4. Podać największą wartość funkcji f na okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$.

a) $f(x,y)=4x+5y$, $\boldsymbol{\sqrt{41}}$

b) $f(x,y)=3x+4y$, **5**

c) $f(x,y)=2x+3y$, $\boldsymbol{\sqrt{13}}$

d) $f(x,y)=x+2y$, $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(6, +\infty\right)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(3, +\infty\right)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(4, +\infty\right)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(2, +\infty\right)}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{15}/4}$

b) $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{4/5}$

c) $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{3/5}$

d) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{5}/3}$

7. Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ jest równy 10. Podać wyznacznik podanej macierzy.

a) $\det\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{pmatrix} = \mathbf{40}$ **b)** $\det\begin{pmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{pmatrix} = \mathbf{60}$

c) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{80}$ **d)** $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \mathbf{270}$

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{0}$ $b = \mathbf{0}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-3/2}$ $b = \mathbf{-2}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-2/3}$ $b = \mathbf{-1}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 6 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-10/3}$ $b = \mathbf{-4}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 27, 28, 29\}$, natomiast działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g.

a) $g = 25$, **6** **b)** $g = 26$, **15**

c) $g = 24$, **5** **d)** $g = 27$, **10**

10. Dla podanej liczby n podać największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $n=7$, $k=\mathbf{12}$ **b)** $n=10$, $k=\mathbf{30}$

c) $n=8$, $k=\mathbf{15}$ **d)** $n=5$, $k=\mathbf{6}$

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4)=\mathbf{5/12}$ **b)** $P(5)=\mathbf{11/36}$

c) $P(3)=\mathbf{5/9}$ **d)** $P(2)=\mathbf{3/4}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/27}$

b) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=2/3$, $P(B\cap C)=1/3$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/3}$

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/2$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/4}$

d) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/12}$

1. Podać **w uproszczonej postaci** wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} = \mathbf{3/8}$

b) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \mathbf{ln\,2}$

c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \mathbf{7/24}$

d) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \mathbf{1/2}$

2. Podać wartość granicy ciągu.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n+5}{6n+1}\right)^n = \mathbf{e^{2/3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{1/e}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \mathbf{e^3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathbf{e}}$

3. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-20} : n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/5}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-20} : n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/7}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-111} : n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/14}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-111} : n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/10}$

4. Podać największą wartość funkcji f na okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$.

a) $f(x,y)=4x+5y$, $\boldsymbol{\sqrt{41}}$

b) $f(x,y)=2x+3y$, $\boldsymbol{\sqrt{13}}$

c) $f(x,y)=3x+4y$, **5**

d) $f(x,y)=x+2y$, $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\big(4,+\infty\big)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\big(2,+\infty\big)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\big(6,+\infty\big)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\big(3,+\infty\big)}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{15}/4}$

b) $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{4/5}$

c) $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=\boldsymbol{3/5}$

d) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{5}/3}$

7. Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ jest równy 10. Podać wyznacznik podanej macierzy.

a) $\det\begin{pmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{pmatrix} = \mathbf{60}$

b) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{80}$

c) $\det\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{pmatrix} = \mathbf{40}$

d) $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \mathbf{270}$

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 1.

a) $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 6 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-10/3}$ $b = \mathbf{-4}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-3/2}$ $b = \mathbf{-2}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-2/3}$ $b = \mathbf{-1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{0}$ $b = \mathbf{0}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 27, 28, 29\}$, natomiast działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g.

a) $g = 25$, **6**

b) $g = 27$, **10**

c) $g = 24$, **5**

d) $g = 26$, **15**

10. Dla podanej liczby n podać największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $n=5$, $k=\mathbf{6}$ **b)** $n=10$, $k=\mathbf{30}$

c) $n=8$, $k=\mathbf{15}$ **d)** $n=7$, $k=\mathbf{12}$

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{11/36}$ **b)** $P(3)=\mathbf{5/9}$

c) $P(2)=\mathbf{3/4}$ **d)** $P(4)=\mathbf{5/12}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=2/3$, $P(B\cap C)=1/3$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/3}$

b) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/12}$

c) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/2$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/4}$

d) $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/27}$

1. Podać **w uproszczonej postaci** wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \mathbf{ln\,2}$

b) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \mathbf{7/24}$

c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = \mathbf{1/2}$

d) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3} = \mathbf{3/8}$

2. Podać wartość granicy ciągu.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n+5}{6n+1}\right)^n = \mathbf{e^{2/3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \mathbf{e^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathbf{e}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{1/e}$

3. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-111} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/14}$

b) $\sup\left\{\frac{1}{n^3-20} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/7}$

c) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-111} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/10}$

d) $\sup\left\{\frac{1}{n^2-20} :\ n\in\mathbb{N}\right\} = \mathbf{1/5}$

4. Podać największą wartość funkcji f na okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$.

a) $f(x,y)=4x+5y$, $\boldsymbol{\sqrt{41}}$

b) $f(x,y)=3x+4y$, $\mathbf{5}$

c) $f(x,y)=x+2y$, $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

d) $f(x,y)=2x+3y$, $\boldsymbol{\sqrt{13}}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(4,+\infty\right)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(2,+\infty\right)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(3,+\infty\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{\left(6,+\infty\right)}$

6. Podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\dfrac{1}{4}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{15}/4}$

b) $z=\dfrac{3}{5}+ai$, $a=\mathbf{4/5}$

c) $z=\dfrac{4}{5}+ai$, $a=\mathbf{3/5}$

d) $z=\dfrac{2}{3}+ai$, $a=\boldsymbol{\sqrt{5}/3}$

7. Wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ jest równy 10. Podać wyznacznik podanej macierzy.

a) $\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \mathbf{270}$

b) $\det\begin{pmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{pmatrix} = \mathbf{60}$

c) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{80}$

d) $\det\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{pmatrix} = \mathbf{40}$

8. Podać takie liczby rzeczywiste a, b, aby podana macierz miała wartości własne 0 i 1.

a) $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 6 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-10/3}$ $b = \mathbf{-4}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-3/2}$ $b = \mathbf{-2}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{-2/3}$ $b = \mathbf{-1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ $a = \mathbf{0}$ $b = \mathbf{0}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 27, 28, 29\}$, natomiast działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g.

a) $g = 27$, **10**

b) $g = 24$, **5**

c) $g = 25$, **6**

d) $g = 26$, **15**

10. Dla podanej liczby n podać największą taką liczbę naturalną k, że w grupie permutacji S_n istnieje element rzędu k.

a) $n=7$, $k=\mathbf{12}$

b) $n=5$, $k=\mathbf{6}$

c) $n=10$, $k=\mathbf{30}$

d) $n=8$, $k=\mathbf{15}$

11. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{11/36}$

b) $P(4)=\mathbf{5/12}$

c) $P(2)=\mathbf{3/4}$

d) $P(3)=\mathbf{5/9}$

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podać w postaci ułamka nieskracalnego $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisać **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/4$, $P(A\cap C)=1/4$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/12}$

b) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=2/3$, $P(B\cap C)=1/3$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/3}$

c) $P(A\cap B)=1/9$, $P(A\cap C)=1/9$, $P(B\cap C)=1/9$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/27}$

d) $P(A\cap B)=1/2$, $P(A\cap C)=1/2$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C)=\mathbf{1/4}$