

1. Podać w uproszczonej postaci wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^2 x dx = \dots\dots\dots$     b)  $\int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^2 x^5 dx = \dots\dots\dots$     d)  $\int_0^2 x^7 dx = \dots\dots\dots$

2. Podać wartość granicy ciągu.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n} \right) = \dots\dots\dots$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \dots\dots\dots$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right) = \dots\dots\dots$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right) = \dots\dots\dots$

3. Niech  $f$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x) = x^3 \cdot e^x$ . Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji  $f$  w zerze.

a)  $f^{(6)}(0) = \dots\dots\dots$     b)  $f^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

c)  $f^{(11)}(0) = \dots\dots\dots$     d)  $f^{(10)}(0) = \dots\dots\dots$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^{2n}}{n^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot x^n$ ,  $R = \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \cdot x^n$ ,  $R = \dots\dots\dots$  d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{n^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich swartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których podane wyrażenie przyjmuje tylko wartości nieujemne przy  $x, y \in \mathbb{R}$ . Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a)  $x^2 + pxy + y^2$ ,  $\dots\dots\dots$

b)  $x^6 + px^3y^3 + 3y^6$ ,  $\dots\dots\dots$

c)  $x^4 + px^2y^2 + 2y^4$ ,  $\dots\dots\dots$

d)  $x^8 + px^4y^4 + 4y^8$ ,  $\dots\dots\dots$

6. Niech  $z = \sqrt{3} + i$ . Podać część rzeczywistą potęgi liczby  $z$ :

a)  $\operatorname{Re}(z^8) = \dots\dots\dots$  b)  $\operatorname{Re}(z^7) = \dots\dots\dots$

c)  $\operatorname{Re}(z^5) = \dots\dots\dots$  d)  $\operatorname{Re}(z^6) = \dots\dots\dots$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  ..... b)  $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$  ..... d)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  .....

8. Podać taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że podany wektor jest prostopadły do wektora  $(1, 2, 3)$ .

a)  $(1, a, a)$   $a =$  ..... b)  $(a, 1, 1)$   $a =$  .....

c)  $(1, a, 1)$   $a =$  ..... d)  $(1, 1, a)$   $a =$  .....

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 44, 45, 46\}$ , natomiast działaniem jest mnożenie modulo 47. Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podać element do niego odwrotny.

a)  $g=6$ ,  $g^{-1} =$  ..... b)  $g=4$ ,  $g^{-1} =$  .....

c)  $g=3$ ,  $g^{-1} =$  ..... d)  $g=5$ ,  $g^{-1} =$  .....

**10.** Dla podanej liczby  $k$  podać najmniejszą taką liczbę naturalną  $n$ , że w grupie permutacji  $S_n$  istnieje element rzędu  $k$ .

a)  $k = 56$ ,  $n = \dots\dots\dots$     b)  $k = 55$ ,  $n = \dots\dots\dots$

c)  $k = 53$ ,  $n = \dots\dots\dots$     d)  $k = 54$ ,  $n = \dots\dots\dots$

**11.** Przy rzucie niesymetryczną monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $2/3$ . Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że przy trzykrotnym rzucie tą monetą wypadnie dokładnie  $n$  orłów. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(3) = \dots\dots\dots$     b)  $P(0) = \dots\dots\dots$

c)  $P(1) = \dots\dots\dots$     d)  $P(2) = \dots\dots\dots$

**12.** Losujemy liczbę  $a$  ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  oraz liczbę  $b$  ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Niech  $E(m, n)$  będzie wartością oczekiwaną iloczynu  $ab$ . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $E(5, 7) = \dots\dots\dots$     b)  $E(6, 6) = \dots\dots\dots$

c)  $E(7, 7) = \dots\dots\dots$     d)  $E(5, 6) = \dots\dots\dots$