EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
26 czerwca 2019 r.

Zadanie **1.** Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$|\mathrm{tg} x - \mathrm{tg} y| \geqslant |x - y| .$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\right\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać równanie

$$x'(t) = x(t)^2$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = b$$

w zależności od parametru $b \in [-1,1]$.

Zadanie **4.** Podać przykład takich macierzy kwadratowych A i B rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych, że

$$A^2 = B^2 = (AB)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (AB)^2 .$$

Zadanie **5.** Niech a i b będą elementami grupy nieabelowej G. Dowieść, że elementy ab i ba mają taki sam rząd.

Zadanie **6.** W urnie znajduje się 10 kostek do gry: 9 zwyczajnych i jedna magiczna. Przy rzucie magiczną kostką zawsze wypada szóstka. Wylosowaliśmy z urny jedną kostkę i rzuciliśmy nią. Okazało się, że wypadła szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy ponownym rzucie tą samą kostką znowu wypadnie szóstka?