EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dwa niezależne portfele S_1, S_2 mają złożone rozkłady Poissona. $S_1 \sim CPoisson(2, F)$, $S_2 \sim CPoisson(2, G)$, gdzie F jest dystrybuantą rozkładu równomiernego na $\{2, 4, 6, 8\}$ oraz G jest dystrybuantą rozkładu równomiernego na $\{3, 5, 7, 9\}$. Podaj wzór na dystrybuantę zmiennej $S_1 + S_2$.

($CPoisson(\lambda, F)$ oznacza rozkład zmiennej $X_1 + \cdots + X_N$, gdzie N ma rozkład Poissona o wartości średniej $\lambda > 0$, a zmienne X_i, $i \geq 1$ są niezależne od N oraz tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach o dystrybuancie F)

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech T_{20} będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.02 opisującą przyszły czas życia dwudziestolatka podpisującego umowę ubezpieczeniową, w której składki płacone są ze stałą intensywnością i która gwarantuje wypłatę kwoty 1000 w chwili śmierci ubezpieczonego. Zakładając stałą intensywność oprocentowania w czasie trwania ubezpieczenia oraz że zachodzi warunek równoważności

a) (*6 pkt.*) oblicz intensywność płaconych składek;

b) (*2 pkt.*) podaj wartość rezerwy w chwili rozpoczęcia trwania umowy.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ będzie próbą z rozkładu o dystrybuancie F. Udowodnić, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ dystrybuanta empiryczna $F_n(t; \mathbf{X})$ jest nieobciążonym estymatorem $F(t)$.

Uwaga. Jeśli nie pamiętasz definicji dystrybuanty empirycznej to przypominamy,

$$F_n(t; \mathbf{X}) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n : X_j \leq t\}}{n},$$

gdzie # oznacza liczbę elementów zbioru.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?
3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Mamy dany czworokąt wypukły $ABCB$, a punkty K, L, M, N są środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Udowodnić, że $KLMN$ jest równoległobokiem.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ będzie próbą z rozkładu o dystrybuancie F. Udowodnić, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ dystrybuanta empiryczna $F_n(t; \mathbf{X})$ jest nieobciążonym estymatorem $F(t)$.

Uwaga. Jeśli nie pamiętasz definicji dystrybuanty empirycznej to przypominamy,

$$F_n(t; \mathbf{X}) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n \,:\, X_j \leq t\}}{n},$$

gdzie # oznacza liczbę elementów zbioru.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?
3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\boldsymbol{a} = (a_,\ldots,a_n)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ będą wektorami ortonormalnymi oraz $X_1,\ldots,X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie standardowym normalnym. Oznaczmy

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

- (i) Obliczyć $\mathbb{E}S_j$, $\mathbb{V}arS_j$ $(j = 1,2)$ oraz $\mathrm{cov}(S_1, S_2)$.
- (ii) Jaki rozkład mają S_j.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, P)$ będzie ruchem Browna. Oblicz

$$E\left(\int_s^t B_u^2 du | \mathcal{F}_s\right). \tag{1}$$

Uzasadnij wszystkie przejścia, powołując się na odpowiednie twierdzenia (sprawdź założenia) i własności.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego z parametrami $EX_1 = EY_1 = \mu$, $VarX_1 = VarY_1 = \sigma^2$, $Cov(X_1,Y_1) = \rho\sigma^2$. Definiujemy nowe zmienne $Z_i = X_i + Y_i$, $R_i = X_i - Y_i$, $i = 1,\ldots,n$. Niech $\rho_0 \in (-1,1)$. Testujemy

$$H_0 : \rho = \rho_0 \quad \text{przeciwko} \quad H_1 : \rho \neq \rho_0,$$

na podstawie statystyki

$$T = \frac{S_Z^2}{S_R^2}, \qquad \text{gdzie} \quad S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2, \quad S_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2.$$

Wyznacz rozkład T przy założeniu prawdziwości hipotezy testowanej.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?
3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**

Jezioro ma stałą objętość V (mierzoną w km^3) i zawiera w czasie t masę $Q(t)$ substancji zanieczyszczającej mierzoną w kg. Masa początkowa w chwili $t = 0$ wynosi Q_0. Zakładamy, że zanieczyszczenie jest równomiernie rozmieszczone w całym jeziorze, a więc jego stężenie w każdym miejscu w jeziorze jest takie samo. Zakładamy, że do jeziora wpływa w tempie r (w km^3/rok) zanieczyszczona woda zawierająca stałe stężenie c_0 zanieczyszczeń oraz że woda opuszcza jezioro w tym samym tempie.

(i) Wyznacz masę $Q(t)$ zanieczyszczeń w chwili t?

(ii) Jeśli zakończone zostanie wprowadzania zanieczyszczeń do jeziora, czyli gdy $c_0 = 0$, to jaki czas upłynie zanim masa zanieczyszczeń zostanie zredukowana o połowę?

(iii) Oszacuj czas potrzebny na zredukowanie masy zanieczyszczeń do poziomu 10% ich początkowej wartości w sytuacji gdy $V = 460\,[km^3]$ i $r = 175\,[km^3/rok]$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozpatrzmy następujący model mutacji nici DNA. Każdy nukleotydy podlega mutacji w sposób niezależny od pozostałych nukleotydów. Przy każdej replikacji nici DNA, każdy z czterech nukleotydów **A,C,G,T** może zostać zastąpiony przez nukleotyd innego typu z tym samym ustalonym prawdopodobieństwem α.

(a) Zaproponuj, oparty o łańcuch Markowa, model matematyczny opisujący ten proces mutacji.

(b) Załóżmy, że w wybranym miejscu nici DNA znajduje się początkowo nukleotyd **C**. Jaka jest średnia liczba replikacji do momentu pojawienia się nukleotydu **G** w tym ustalonym miejscu nici DNA?

(c) Zakładamy, że nić DNA podlegała bardzo dużej liczbie replikacji. Jakiej przybliżonej częstości poszczególnych nukleotydów możemy się wtedy spodziewać w jej składzie.

(d) Czy zdefiniowany przez Ciebie łańcuch Markowa jest odwracalny w czasie?

Zadanie 3. (8 punktów)

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ będzie próbą z rozkładu o dystrybuancie F. Udowodnić, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ dystrybuanta empiryczna $F_n(t; \mathbf{X})$ jest nieobciążonym estymatorem $F(t)$.

Uwaga. Jeśli nie pamiętasz definicji dystrybuanty empirycznej to przypominamy,

$$F_n(t; \mathbf{X}) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n \,:\, X_j \leq t\}}{n},$$

gdzie # oznacza liczbę elementów zbioru.

Zadanie 4. (8 punktów)

Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?
3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 5. (8 punktów)

Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozstrzygnij, czy istnieje skończenie czy nieskończenie wiele pierścieni (z dokładnością do izomorfizmu), których grupa elementów odwracalnych ma rząd będący liczbą pierwszą. Jeśli jest ich skończenie wiele, wyznacz ich liczbę.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Odcinek łączący punkty $(1, 0, 0)$ i $(3, 0, 0)$ jest zawarty w półpłaszczyźnie $H = \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$, i obraca się w tej półaszczyźnie wokół swojego środka ze stałą prędkością kątową. Jednocześnie półpłaszczyzna H obraca się wraz z tym odcinkiem wokół osi Oz ze stałą predkością kątową dwa razy większą. Podczas jednokrotnego obiegu półpłaszczyzny wokół osi Oz odcinek zakreśla powierzchnię, która jest wstęgą Moebiusa. Wyprowadź parametryczne równanie tej powierzchni, zależne od parametru długości $t \in [-1, 1]$ na ruchomym odcinku, i od kąta $\theta \in [0, 2\pi]$ o jaki obrócona została półpłaszczyzna.

WSKAZÓWKA: Rozważ macierz obrotu o kąt θ wokół osi Oz, i nałóż ją na wektor wodzący punktu na odpowiednio obróconym odcinku.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Niech

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

oznacza kulę o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $r > 0$. Niech $E \subseteq X$ i $x \in X$, wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) $x \in \mathrm{cl}E$, gdzie $\mathrm{cl}E$ oznacza domknięcie zbioru E;

(ii) $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$ dla wszystkich $r > 0$;

(iii) Istnieje ciąg $(x_n)_{n\in} \subseteq E$ który zbiega do x.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?
3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2019r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie z dystrybuantą F i gęstością f. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozważmy model liniowy $\boldsymbol{Y} = \mathbb{1}\,\alpha + \boldsymbol{X}_c\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$, gdzie $\boldsymbol{X}_c$ jest macierzą scentrowaną. Niech $\boldsymbol{X} = [\mathbb{1}\,\boldsymbol{X}_c]$, a $\boldsymbol{b} = (\alpha, \boldsymbol{\beta}')'$. Wtedy $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}$. Załóżmy, że macierz planu ma postać $\boldsymbol{X} = [\mathbb{1}\,\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_p]$, a jej kolumny są ortogonalne. Wykaż, że estymator MNK wektora $\boldsymbol{b}$ ma postać $\hat{\boldsymbol{b}} = (\overline{Y}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_p)'$, gdzie $\hat{b}_j$ jest estymatorem MNK w modelu regresji liniowej $Y_i = b_j c_{ij} + e_i$, $i = 1, \ldots, n$, dla $j = 1, \ldots, p$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ będzie próbą z rozkładu o dystrybuancie F. Udowodnić, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ dystrybuanta empiryczna $F_n(t; \mathbf{X})$ jest nieobciążonym estymatorem $F(t)$.

Uwaga. Jeśli nie pamiętasz definicji dystrybuanty empirycznej to przypominamy,

$$F_n(t; \mathbf{X}) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n \,:\, X_j \leq t\}}{n},$$

gdzie # oznacza liczbę elementów zbioru.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$ oraz przedział $A = [2, 3)$.

1. Czy A jest zwarty?
2. Czy A jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych?

3. Czy A jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych?
4. Czy A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości z poniższy wzór

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2i)^n n^2}$$

ma sens. Wyznacz obszar holomorficzności tej funkcji. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?