

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (3-p)^n$ , ..... b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+p)^n}{n}$ , .....

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-p)^n}{\sqrt{n}}$ , ..... d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+p)^n}{n^2}$ , .....

2. Niech  $C(a, b)$  będzie zdefiniowane wzorem

$$\int_a^b \frac{3x^2 - 1}{(x-1)x(x+1)} dx = \ln C(a, b).$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a)  $C(6, 15) = \dots\dots\dots$  b)  $C(4, 5) = \dots\dots\dots$

c)  $C(3, 5) = \dots\dots\dots$  d)  $C(2, 3) = \dots\dots\dots$

3. Niech  $f$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}$ . Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji  $f$  w zerze.

a)  $f^{(12)}(0) = \dots\dots\dots$  b)  $f^{(11)}(0) = \dots\dots\dots$

c)  $f^{(14)}(0) = \dots\dots\dots$  d)  $f^{(13)}(0) = \dots\dots\dots$

4. Podać granice ciągów.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n+3}{5n+1} \right)^n = \dots\dots\dots$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \dots\dots\dots$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = \dots\dots\dots$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = \dots\dots\dots$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)  $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+1} dx, \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8+x^2} dx, \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4+x} dx, \dots\dots\dots$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{16}+x^3} dx, \dots\dots\dots$

6. Podać liczbę liczb zespolonych  $z$  spełniających podane równanie.

a)  $z^8 + z^{16} = z^{24} + 1, \dots\dots\dots$  b)  $z^9 + z^{15} = z^{24} + 1, \dots\dots\dots$

c)  $z^{11} + z^{13} = z^{24} + 1, \dots\dots\dots$  d)  $z^{10} + z^{14} = z^{24} + 1, \dots\dots\dots$

7. Dla podanych liczb  $a$  i  $b$  wskazać takie liczby  $c, d$  i  $e$ , aby wektory  $(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 5, 7, 11)$  i  $(a, b, c, d, e)$  były liniowo zależne.

a)  $a=3, b=5, c= \dots, d= \dots, e= \dots$

b)  $a=1, b=1, c= \dots, d= \dots, e= \dots$

c)  $a=3, b=4, c= \dots, d= \dots, e= \dots$

d)  $a=2, b=4, c= \dots, d= \dots, e= \dots$

8. Niech  $I$  będzie macierzą identycznościową rozmiaru  $10 \times 10$ , natomiast niech  $A$  będzie macierzą diagonalną (też rozmiaru  $10 \times 10$ ), w której na przekątnej jest jedna jedynka, dwie dwójki, trzy trójki i cztery czwórki. Podać rząd macierzy.

a)  $A^2 - 7A + 12I$ , rząd  $\dots$

b)  $A^2 - 5A + 6I$ , rząd  $\dots$

c)  $A^2 - 3A + 2I$ , rząd  $\dots$

d)  $A - I$ , rząd  $\dots$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest zbiór  $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ , natomiast działaniem jest mnożenie modulo 15. Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podać element do niego odwrotny.

a)  $g = 8$ ,  $g^{-1} = \dots\dots\dots$     b)  $g = 4$ ,  $g^{-1} = \dots\dots\dots$

c)  $g = 2$ ,  $g^{-1} = \dots\dots\dots$     d)  $g = 7$ ,  $g^{-1} = \dots\dots\dots$

**10.** Zbiorem elementów grupy jest zbiór  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29\}$ , a działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podać rząd elementu  $g$  w tej grupie.

a)  $g = 18$ , rząd  $\dots\dots\dots$     b)  $g = 17$ , rząd  $\dots\dots\dots$

c)  $g = 15$ , rząd  $\dots\dots\dots$     d)  $g = 16$ , rząd  $\dots\dots\dots$

**11.** Rzucamy dwiema identycznymi kostkami do gry. Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach różnią się o  $n$ . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(3) = \dots\dots\dots$     b)  $P(0) = \dots\dots\dots$

c)  $P(1) = \dots\dots\dots$     d)  $P(2) = \dots\dots\dots$

**12.** Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem  $p$ . Niech  $P(p)$  oznacza prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie taką monetą wyniki obu rzutów są takie same. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(2/3) = \dots\dots\dots$     b)  $P(3/4) = \dots\dots\dots$

c)  $P(3/5) = \dots\dots\dots$     d)  $P(1/3) = \dots\dots\dots$