EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
6 lutego 2019 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{n^{3n}} .$$

Czy szereg jest zbieżny dla $x = 1$?

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x + 8y + 27z$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y,z) : x^4 + y^4 + z^4 = 1\right\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Dla każdej z wartości parametru $a \in \{0,\, 1/2,\, 1\}$ rozwiązać zagadnienie początkowe:

$$x'(t) = x(t)^a, \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = 1.$$

Zadanie **4.** Niech I oznacza macierz identycznościową rozmiaru 3×3 i niech A będzie macierzą rozmiaru 3×3 mającą trzy różne niezerowe wartości własne.

Dowieść, że macierz $A + A^{-1} + I$ jest odwracalna.

Zadanie **5.** Podać przykład grupy abelowej G oraz takich jej elementów a i b rzędu 12, że rząd elementu ab jest równy 4.

Oczywista oczywistość: Udowodnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **6.** Mamy dwie nierozróżnialne urny. W pierwszej urnie jest 21 kul czarnych. W drugiej urnie jest 15 kul czarnych i 6 kul białych. Wybraliśmy losowo urnę, a następnie wylosowaliśmy z niej dwie kule (bez zwracania). Okazało się, że obie wylosowane kule są czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowania dokonywaliśmy z urny, w której wszystkie kule są czarne?