

4. Podać granice ciągów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{5n+1} \right)^n = e^{2/5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \sqrt[3]{e}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = e$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = 1/\sqrt{e}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+1} dx, \quad (-1, 1)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8+x^2} dx, \quad (1, 7)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4+x} dx, \quad (0, 3)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{16}+x^3} dx, \quad (2, 15)$

6. Podać liczbę liczb zespolonych z spełniających podane równanie.

a) $z^8 + z^{16} = z^{24} + 1, \quad 16$

b) $z^9 + z^{15} = z^{24} + 1, \quad 21$

c) $z^{11} + z^{13} = z^{24} + 1, \quad 23$

d) $z^{10} + z^{14} = z^{24} + 1, \quad 22$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c , d i e , aby wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 5, 7, 11)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a=3$, $b=5$, $c=8$, $d=11$, $e=16$

b) $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, $e=6$

c) $a=3$, $b=4$, $c=7$, $d=10$, $e=17$

d) $a=2$, $b=4$, $c=6$, $d=8$, $e=10$

8. Niech I będzie macierzą identyczościową rozmiaru 10×10 , natomiast niech A będzie macierzą diagonalną (też rozmiaru 10×10), w której na przekątnej jest jedna jedynka, dwie dwójki, trzy trójki i cztery czwórki. Podać rząd macierzy.

a) $A^2 - 7A + 12I$, rząd **3**

b) $A^2 - 5A + 6I$, rząd **5**

c) $A^2 - 3A + 2I$, rząd **7**

d) $A - I$, rząd **9**

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 15. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 8, \quad g^{-1} = 2$

b) $g = 4, \quad g^{-1} = 4$

c) $g = 2, \quad g^{-1} = 8$

d) $g = 7, \quad g^{-1} = 13$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g w tej grupie.

a) $g = 18, \quad \text{rząd } 5$

b) $g = 17, \quad \text{rząd } 30$

c) $g = 15, \quad \text{rząd } 2$

d) $g = 16, \quad \text{rząd } 15$

11. Rzucamy dwiema identycznymi kostkami do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach różnią się o n . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3) = 1/6$

b) $P(0) = 1/6$

c) $P(1) = 5/18$

d) $P(2) = 2/9$

12. Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem p . Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie taką monetą wyniki obu rzutów są takie same. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2/3) = 5/9$

b) $P(3/4) = 5/8$

c) $P(3/5) = 13/25$

d) $P(1/3) = 5/9$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-p)^n}{\sqrt{n}}, (4, 6]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+p)^n}{n}, [-4, -2)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3-p)^n, (2, 4)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+p)^n}{n^2}, [-6, -4]$

2. Niech $C(a, b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int_a^b \frac{3x^2 - 1}{(x-1)x(x+1)} dx = \ln C(a, b).$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(2, 3) = 4$

b) $C(3, 5) = 5$

c) $C(6, 15) = 16$

d) $C(4, 5) = 2$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(14)}(0) = 14$

b) $f^{(12)}(0) = 1/11$

c) $f^{(11)}(0) = -1/120$

d) $f^{(13)}(0) = -13/12$

4. Podać granice ciągów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{5n+1} \right)^n = e^{2/5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = 1/\sqrt{e}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = e$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \sqrt[3]{e}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{16} + x^3} dx, \quad (2, 15)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8 + x^2} dx, \quad (1, 7)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4 + x} dx, \quad (0, 3)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2 + 1} dx, \quad (-1, 1)$

6. Podać liczbę liczb zespolonych z spełniających podane równanie.

a) $z^9 + z^{15} = z^{24} + 1, \quad 21$

b) $z^{10} + z^{14} = z^{24} + 1, \quad 22$

c) $z^8 + z^{16} = z^{24} + 1, \quad 16$

d) $z^{11} + z^{13} = z^{24} + 1, \quad 23$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c , d i e , aby wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 5, 7, 11)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$, $d = 11$, $e = 16$

b) $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 6$

c) $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 10$

d) $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 10$, $e = 17$

8. Niech I będzie macierzą identyczościową rozmiaru 10×10 , natomiast niech A będzie macierzą diagonalną (też rozmiaru 10×10), w której na przekątnej jest jedna jedynka, dwie dwójki, trzy trójki i cztery czwórki. Podać rząd macierzy.

a) $A - I$, rząd **9**

b) $A^2 - 5A + 6I$, rząd **5**

c) $A^2 - 3A + 2I$, rząd **7**

d) $A^2 - 7A + 12I$, rząd **3**

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 15. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 4, \quad g^{-1} = 4$

b) $g = 7, \quad g^{-1} = 13$

c) $g = 2, \quad g^{-1} = 8$

d) $g = 8, \quad g^{-1} = 2$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g w tej grupie.

a) $g = 16, \quad \text{rząd } 15$

b) $g = 18, \quad \text{rząd } 5$

c) $g = 17, \quad \text{rząd } 30$

d) $g = 15, \quad \text{rząd } 2$

11. Rzucamy dwiema identycznymi kostkami do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach różnią się o n . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2) = 2/9$

b) $P(3) = 1/6$

c) $P(1) = 5/18$

d) $P(0) = 1/6$

12. Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem p . Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie taką monetą wyniki obu rzutów są takie same. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(2/3) = 5/9$

b) $P(3/4) = 5/8$

c) $P(1/3) = 5/9$

d) $P(3/5) = 13/25$

1. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-p)^n}{\sqrt{n}}, (4, 6] \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (3-p)^n, (2, 4)$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+p)^n}{n^2}, [-6, -4] \qquad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+p)^n}{n}, [-4, -2)$$

2. Niech $C(a, b)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$\int_a^b \frac{3x^2 - 1}{(x-1)x(x+1)} dx = \ln C(a, b).$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

$$\text{a) } C(6, 15) = \mathbf{16} \qquad \text{b) } C(3, 5) = \mathbf{5}$$

$$\text{c) } C(2, 3) = \mathbf{4} \qquad \text{d) } C(4, 5) = \mathbf{2}$$

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}$. Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

$$\text{a) } f^{(11)}(0) = \mathbf{-1/120} \qquad \text{b) } f^{(12)}(0) = \mathbf{1/11}$$

$$\text{c) } f^{(14)}(0) = \mathbf{14} \qquad \text{d) } f^{(13)}(0) = \mathbf{-13/12}$$

4. Podać granice ciągów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{5n+1} \right)^n = e^{2/5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = e$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = 1/\sqrt{e}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \sqrt[3]{e}$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4+x} dx, \quad (0, 3)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+1} dx, \quad (-1, 1)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{16}+x^3} dx, \quad (2, 15)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8+x^2} dx, \quad (1, 7)$

6. Podać liczbę liczb zespolonych z spełniających podane równanie.

a) $z^9 + z^{15} = z^{24} + 1, \quad \mathbf{21}$

b) $z^{10} + z^{14} = z^{24} + 1, \quad \mathbf{22}$

c) $z^8 + z^{16} = z^{24} + 1, \quad \mathbf{16}$

d) $z^{11} + z^{13} = z^{24} + 1, \quad \mathbf{23}$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c , d i e , aby wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 5, 7, 11)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, $e=6$

b) $a=2$, $b=4$, $c=6$, $d=8$, $e=10$

c) $a=3$, $b=5$, $c=8$, $d=11$, $e=16$

d) $a=3$, $b=4$, $c=7$, $d=10$, $e=17$

8. Niech I będzie macierzą identyczościową rozmiaru 10×10 , natomiast niech A będzie macierzą diagonalną (też rozmiaru 10×10), w której na przekątnej jest jedna jedynka, dwie dwójki, trzy trójki i cztery czwórki. Podać rząd macierzy.

a) $A^2 - 7A + 12I$, rząd **3**

b) $A^2 - 5A + 6I$, rząd **5**

c) $A^2 - 3A + 2I$, rząd **7**

d) $A - I$, rząd **9**

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 15. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 4, \quad g^{-1} = 4$

b) $g = 8, \quad g^{-1} = 2$

c) $g = 2, \quad g^{-1} = 8$

d) $g = 7, \quad g^{-1} = 13$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g w tej grupie.

a) $g = 15, \quad \text{rząd } 2$

b) $g = 18, \quad \text{rząd } 5$

c) $g = 17, \quad \text{rząd } 30$

d) $g = 16, \quad \text{rząd } 15$

11. Rzucamy dwiema identycznymi kostkami do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach różnią się o n . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3) = 1/6$

b) $P(1) = 5/18$

c) $P(0) = 1/6$

d) $P(2) = 2/9$

12. Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem p . Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie taką monetą wyniki obu rzutów są takie same. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3/4) = 5/8$

b) $P(3/5) = 13/25$

c) $P(1/3) = 5/9$

d) $P(2/3) = 5/9$

4. Podać granice ciągów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{5n+1} \right)^n = e^{2/5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = 1/\sqrt{e}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \sqrt[3]{e}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n = e$

5. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4+x} dx, \quad (0, 3)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+1} dx, \quad (-1, 1)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8+x^2} dx, \quad (1, 7)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^{16}+x^3} dx, \quad (2, 15)$

6. Podać liczbę liczb zespolonych z spełniających podane równanie.

a) $z^9 + z^{15} = z^{24} + 1, \quad 21$

b) $z^{10} + z^{14} = z^{24} + 1, \quad 22$

c) $z^8 + z^{16} = z^{24} + 1, \quad 16$

d) $z^{11} + z^{13} = z^{24} + 1, \quad 23$

7. Dla podanych liczb a i b wskazać takie liczby c , d i e , aby wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 5, 7, 11)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a=3$, $b=4$, $c=7$, $d=10$, $e=17$

b) $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, $e=6$

c) $a=2$, $b=4$, $c=6$, $d=8$, $e=10$

d) $a=3$, $b=5$, $c=8$, $d=11$, $e=16$

8. Niech I będzie macierzą identyczościową rozmiaru 10×10 , natomiast niech A będzie macierzą diagonalną (też rozmiaru 10×10), w której na przekątnej jest jedna jedynka, dwie dwójki, trzy trójki i cztery czwórki. Podać rząd macierzy.

a) $A^2 - 7A + 12I$, rząd **3**

b) $A^2 - 5A + 6I$, rząd **5**

c) $A^2 - 3A + 2I$, rząd **7**

d) $A - I$, rząd **9**

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, natomiast działaniem jest mnożenie modulo 15. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 8, \quad g^{-1} = 2$

b) $g = 2, \quad g^{-1} = 8$

c) $g = 4, \quad g^{-1} = 4$

d) $g = 7, \quad g^{-1} = 13$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 30. Dla podanego elementu g tej grupy podać rząd elementu g w tej grupie.

a) $g = 16, \quad \text{rząd } 15$

b) $g = 15, \quad \text{rząd } 2$

c) $g = 18, \quad \text{rząd } 5$

d) $g = 17, \quad \text{rząd } 30$

11. Rzucamy dwiema identycznymi kostkami do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że liczby oczek wyrzuconych na obu kostkach różnią się o n . Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3) = 1/6$

b) $P(2) = 2/9$

c) $P(0) = 1/6$

d) $P(1) = 5/18$

12. Przy rzucie fałszywą monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem p . Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie taką monetą wyniki obu rzutów są takie same. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3/5) = 13/25$

b) $P(3/4) = 5/8$

c) $P(2/3) = 5/9$

d) $P(1/3) = 5/9$