EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**
O rozkładzie pewnego ryzyka S wiemy, że:

- $E[(S-20)_+] = 8$
- $E[S|10 < S \leq 20] = 13$
- $P(S \leq 20) = \frac{3}{4}$
- $P(S \leq 10) = \frac{1}{4}$.

Obliczy składkę $E[(S-10)_+]$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech T_x będzie nieujemną zmienną losową z gęstością $f_x(t) = ce^{-ct}$ dla $t \geq 0$, opisującą przyszły czas życia x-latka. Ponadto wiadomo, że $\mathbb{E}(T_{20}) = 50$. Oblicz c oraz $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_{30}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozpatrzmy zagadnienie regresji liniowej

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

gdzie U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i skończonej wariancji σ^2 Niech $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ będą estymatorami, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów, odpowiednio dla α i β. Korzystając z faktu, że $\hat{\beta}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru β wykaż, że $\hat{\alpha}$ jest nieobciążonym estymatorem dla α.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych, z metryką

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0,1]\}.$$

Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem składającym się z funkcji przyjmujących co najmniej jedną dodatnią wartość, tzn.

$$A = \{f \in C[0,1] \colon \exists x \in [0,1]\ f(x) > 0\}.$$

1. Czy zbiór A jest otwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
2. Czy zbiór A jest domknięty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
3. Czy zbiór A jest zwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{z^2-4}{z^2(z+i)}dz,$$

gdy γ jest krzywą regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio, która nie przechodzi przez 0 i $-i$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Okręgi o_1 i o_2, o środkach O_1, O_2, są wewnętrznie styczne w pukcie S, o_1 jest okręgiem wewnętrznym. Cięciwa AB okręgu o_2 jest styczna do o_1 w punkcie C, przy czym $SB \leq SA$. Udowodnić, że jeśli $\sphericalangle SO_1C = 2\alpha$ i $\sphericalangle SO_2A = 2\beta$ to $\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSC = \beta - \alpha$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Liczby Fibonacciego zdefiniowane są następująco: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Udowodnić, że

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozpatrzmy zagadnienie regresji liniowej

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

gdzie U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i skończonej wariancji σ^2 Niech $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ będą estymatorami, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów, odpowiednio dla α i β. Korzystając z faktu, że $\hat{\beta}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru β wykaż, że $\hat{\alpha}$ jest nieobciążonym estymatorem dla α.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych, z metryką

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0,1]\}.$$

Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem składającym się z funkcji przyjmujących co najmniej jedną dodatnią wartość, tzn.

$$A = \{f \in C[0,1] \colon \exists x \in [0,1] \; f(x) > 0\}.$$

1. Czy zbiór A jest otwarty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?
2. Czy zbiór A jest domknięty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?
3. Czy zbiór A jest zwarty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{z^2-4}{z^2(z+i)}dz,$$

gdy γ jest krzywą regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio, która nie przechodzi przez 0 i $-i$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $X_j = I_j Y_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, gdzie $I_1, I_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie $\mathbb{P}(I_j = 0) = q_j$, $\mathbb{P}(I_j = 1) = p_j$, gdzie $p_j \geq 0$ i $p_j + q_j = 1$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots$ niezależne o jednakowym rozkładzie, (ściśle) dodatnie i niezależne od ciągu (I_j).
(i) Napisać rozkład zmiennej X_j oraz obliczyć jej średnią i wariancję.
(ii) Pokazać, że jeśli $\sum_{j=1}^{\infty} p_j < \infty$, to szereg $Z = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ jest zbieżny p.n p.
(iii) Obliczyć $\mathbb{E}Z$ i $\mathbb{V}arZ$. Podać warunki na skończoność.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_t}{t},$$
gdzie N_t jest procesem Poissona. Podaj rodzaj zbieżności. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}\mathbb{1}(x > 0)$, $\lambda > 0$. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru λ. Czy istnieje rozkład a priori względem którego wyznaczony ENMW jest bayesowski przy kwadratowej funkcji straty? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych, z metryką
$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\colon x \in [0,1]\}.$$

Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem składającym się z funkcji przyjmujących co najmniej jedną dodatnią wartość, tzn.

$$A = \{f \in C[0,1] \colon \exists x \in [0,1]\ f(x) > 0\}.$$

1. Czy zbiór A jest otwarty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?
2. Czy zbiór A jest domknięty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?
3. Czy zbiór A jest zwarty w $(C[0,1], d_{\text{sup}})$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{z^2-4}{z^2(z+i)} dz,$$

gdy γ jest krzywą regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio, która nie przechodzi przez 0 i $-i$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $N(t)$ oznacza wielkość populacji w chwili t, której rozwój w czasie opisany jest równaniem logistycznym
$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \quad N(0) = N_0,$$
gdzie K, r i N_0 są dodatnimi stałymi.
W pewnym momencie czasu populacja ta zaczyna podlegać odłowom na stałym poziomie E.

(i) Podaj postać równania opisującego rozwój populacji w tak zmienionych warunkach.

(ii) Wyznacz wielkość populacji, przy której rozwija się ona najszybciej.

(iii) Podaj wartość maksymalnego możliwego odłowu, który nie powoduje wymarcia populacji.

Zadanie **2. (8 punktów)**
System składa się z dwóch podzespołów A i B. Czasy do awarii podzespołów A i B mają rozkład wykładniczy z parametrami, odpowiednio α_1 i α_2. Podzespoły ulegają awarii w sposób niezależny i gdy jeden z nich ulegnie awarii cały system ulega awarii. Oblicz oczekiwany czas do awarii całego systemu.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozpatrzmy zagadnienie regresji liniowej
$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$
gdzie U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i skończonej wariancji σ^2 Niech $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ będą estymatorami, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów, odpowiednio dla α i β. Korzystając z faktu, że $\hat{\beta}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru β wykaż, że $\hat{\alpha}$ jest nieobciążonym estymatorem dla α.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych, z metryką

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0,1]\}.$$

Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem składającym się z funkcji przyjmujących co najmniej jedną dodatnią wartość, tzn.

$$A = \{f \in C[0,1] \colon \exists x \in [0,1] \ f(x) > 0\}.$$

1. Czy zbiór A jest otwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
2. Czy zbiór A jest domknięty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
3. Czy zbiór A jest zwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{z^2 - 4}{z^2(z+i)} dz,$$

gdy γ jest krzywą regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio, która nie przechodzi przez 0 i $-i$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 12.09.2018r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $N(0,1)$. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X. Jaką postać będzie miała funkcja charakterystyczna zmiennej losowej $Y = aX + b$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, \ldots, 5$, odpowiednio. Rozważamy problem testowania zbioru hipotez

$$\{H_{0i} : \mu_i = 0,\ H_{1i} : \mu_i \neq 0,\ \ i = 1, \ldots, 5\}.$$

Na podstawie i-tej obserwacji weryfikujemy i-tą hipotezę. Zaobserwowano:

$$1.870, -2.143, -1.480, -1.950, 1.576.$$

Które z hipotez można odrzucić, aby kontrolować
(i) błąd I-ego rodzaju na poziomie istotności $\alpha = 0.1$?
(ii) FDR na poziomie 0.1?
(ii) $FWER$ na poziomie 0.1?
Odpowiedź uzasadnij.

	Kwantyle									
Rozkład	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$N(0,1)$	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrzmy zagadnienie regresji liniowej

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

gdzie U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i skończonej wariancji σ^2 Niech $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$ będą estymatorami, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów, odpowiednio dla α i β. Korzystając z faktu, że $\hat{\beta}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru β wykaż, że $\hat{\alpha}$ jest nieobciążonym estymatorem dla α.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych, z metryką

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\colon x \in [0,1]\}.$$

Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem składającym się z funkcji przyjmujących co najmniej jedną dodatnią wartość, tzn.

$$A = \{f \in C[0,1]\colon \exists x \in [0,1]\ f(x) > 0\}.$$

1. Czy zbiór A jest otwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
2. Czy zbiór A jest domknięty w $(C[0,1], d_{\sup})$?
3. Czy zbiór A jest zwarty w $(C[0,1], d_{\sup})$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znaleźć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_\gamma \frac{z^2 - 4}{z^2(z+i)} dz,$$

gdy γ jest krzywą regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio, która nie przechodzi przez 0 i $-i$