

1. Podać zbiór rozwiązań nierówności.

a)  $\log_x 4 > 2$  .....

b)  $\log_x 4 > -2$  .....

c)  $\log_x 4 < 1/2$  .....

d)  $\log_x 4 < -1/2$  .....

2. Niech  $C(a, b)$  będzie zdefiniowane wzorem  $C(a, b) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^b \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a)  $C(\sqrt{3}, +\infty) = \dots\dots\dots$     b)  $C(1/\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \dots\dots\dots$

c)  $C(-\sqrt{3}, 1) = \dots\dots\dots$     d)  $C(-\infty, 0) = \dots\dots\dots$

3. Dla każdej funkcji różniczkowalnej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającej podane warunki istnieje taka liczba rzeczywista  $x$ , że  $f'(x) = c$ .  
Dla podanych warunków wskazać taką liczbę rzeczywistą  $c$ , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a)  $f(1) = 10, f(4) = 70, c = \dots\dots\dots$

b)  $f(0) = 0, f(2) = 60, c = \dots\dots\dots$

c)  $f(3) = 30, f(8) = 90, c = \dots\dots\dots$

d)  $f(2) = 20, f(6) = 80, c = \dots\dots\dots$

4. Dla funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  określonej podanym wzorem podać jej najmniejszą wartość.

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 14x + 2y, \dots\dots\dots$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x, \dots\dots\dots$

c)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y, \dots\dots\dots$

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 10x - 10y, \dots\dots\dots$

5. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}, R = \dots\dots\dots$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4 \cdot x^n}{(3n)! \cdot n^n}, R = \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4 \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n^{2n}}, R = \dots\dots\dots$  d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^6 \cdot x^{3n}}{(3n)! \cdot n^{3n}}, R = \dots\dots\dots$

6. Dla podanych liczb zespolonych  $z_1, z_2$  oraz  $z_3$  podać taką liczbę zespoloną  $z$ , aby  $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ .

a)  $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 23 + 2i, z_3 = 23 + 6i, z = \dots\dots\dots$

b)  $z_1 = 2 + i, z_2 = 10 + i, z_3 = 10 + 7i, z = \dots\dots\dots$

c)  $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 + 3i, z_3 = 4 + 5i, z = \dots\dots\dots$

d)  $z_1 = 1 + i, z_2 = 5 + i, z_3 = 5 + 3i, z = \dots\dots\dots$

7. Dla podanej macierzy wypisać w kolejności niemalejącej jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  .....

8. Jeżeli każdy wyraz macierzy  $n \times n$  przemnożymy przez 2, to wyznacznik tej macierzy przemnoży się przez  $C$ . Dla podanej liczby  $n$  podać taką liczbę  $C$ , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a)  $n=5$ ,  $C = \dots$     b)  $n=4$ ,  $C = \dots$

c)  $n=3$ ,  $C = \dots$     d)  $n=2$ ,  $C = \dots$

9. Dla podanej liczby  $n$  podać liczbę elementów rzędu 2 w grupie izometrii  $n$ -kąta foremnego.

a)  $n = 32$ , ..... b)  $n = 27$ , .....

c)  $n = 25$ , ..... d)  $n = 30$ , .....

10. Dla podanej liczby  $r$  podać liczbę elementów rzędu  $r$  w grupie permutacji  $S_5$ .

a)  $r = 6$ , ..... b)  $r = 5$ , .....

c)  $r = 2$ , ..... d)  $r = 3$ , .....

11. Na szachownicy o wymiarach  $n \times n$  umieszczamy losowo dwie wieże (na różnych polach). Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że wieże nie biją się (czyli nie stoją w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie). Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(5) =$  ..... b)  $P(2) =$  .....

c)  $P(3) =$  ..... d)  $P(4) =$  .....

12. Uzupełnić podane prawdopodobieństwa wiedząc, że zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne.

a)  $P(A) = 2/3$ ,  $P(B) = 2/3$ ,  $P(A \setminus B) =$  .....  $P(B \setminus A) =$  .....

b)  $P(A) = 1/4$ ,  $P(B) = 1/2$ ,  $P(A \setminus B) =$  .....  $P(B \setminus A) =$  .....

c)  $P(A) = 3/4$ ,  $P(B) = 1/2$ ,  $P(A \setminus B) =$  .....  $P(B \setminus A) =$  .....

d)  $P(A) = 1/3$ ,  $P(B) = 1/3$ ,  $P(A \setminus B) =$  .....  $P(B \setminus A) =$  .....