

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
17 września 2018 r.

Zadanie 1. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 + 50 \ln x$. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa: $f(5) + f(7)$ czy $2f(6)$?

Zadanie 2. Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$$

Obliczyć $f''_{xy}(0, 0)$ oraz $f''_{yx}(0, 0)$.

Zadanie 3. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = 2x(t) - y(t), \quad y'(t) = x(t), \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$$

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka macierz kwadratowa A rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych, że $A^2 = A$, a ponadto $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 5. W grupie nieabelowej G dane są elementy a i b rzędu 3. Dowieść, że rzędy elementów ab^2 i ba^2 są równe.

Zadanie 6. Zawodnik bierze udział w teleturnieju. Prowadzący kładzie na stole 10 zaklejonych kopert i informuje, że w 9 kopertach znajdują się pieniądze, po 100 złotych w każdej, a dziesiąta koperta zawiera kartkę z napisem **50%**.

Zawodnik deklaruje, ile kopert chce wylosować (od 0 do 10). Następnie losuje tyle kopert, ile zadeklarował. Jeżeli we wszystkich wylosowanych kopertach będą znajdować się pieniądze, to pieniądze z wylosowanych kopert staną się wygraną zawodnika. Jeśli wśród wylosowanych kopert znajdzie się koperta z kartką **50%**, zawodnik wygra połowę pieniędzy znajdujących się w wylosowanych kopertach.

Ile kopert powinien wylosować zawodnik, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojej wygranej?