1. Niech $C(a,b)$ będzie zdefiniowane wzorem $\int\limits_a^b \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \ln C(a,b)$.
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $C(1,2) =$ ....   **b)** $C(2,3) =$ ....

c) $C(4,5) =$ ....   **d)** $C(3,8) =$ ....

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{6n}}{n^2 \cdot 64^n}$, ...

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 64^n}$, ...

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 64^n}$, ...

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{64^n}$, ...

3. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \sin^2 x$. Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(5)}(0) =$ ....   **b)** $f^{(4)}(0) =$ ....

c) $f^{(8)}(0) =$ ....   **d)** $f^{(6)}(0) =$ ....

4. Podać wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2}-|x|\,dx=$ .... **b)** $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx=$ ....

c) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}-|x|\,dx=$ .... **d)** $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx=$ ....

5. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=(x^2-b)\cdot\operatorname{sgn}(x-a)$ jest ciągła. **Uwaga:** $\operatorname{sgn}(y)=1$ dla $y>0$, $\operatorname{sgn}(y)=-1$ dla $y<0$, $\operatorname{sgn}(0)=0$.

a) $a=1$, $b=$ .... **b)** $a=3$, $b=$ ....

c) $a=2$, $b=$ .... **d)** $a=4$, $b=$ ....

6. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b, że liczba zespolona $z=a+bi$ spełnia równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $a=4/5$, $b=$ .... **b)** $a=2/3$, $b=$ ....

c) $a=1/2$, $b=$ .... **d)** $a=3/5$, $b=$ ....

7. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu 60. Wówczas.

a) $E(10)=$ .... **b)** $E(12)=$ ....

c) $E(20)=$ .... **d)** $E(15)=$ ....

8. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 13. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, $g^{-1}=$ .... **b)** $g=4$, $g^{-1}=$ ....

c) $g=3$, $g^{-1}=$ .... **d)** $g=2$, $g^{-1}=$ ....

9. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 216 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 216 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 216 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 216 \\ 0 & 6 & 24 & 60 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

10. Dla podanych punktów A i B w przestrzeni trójwymiarowej podać w stopniach miarę kąta $\sphericalangle AOB$, gdzie $O=(0,0,0)$.

a) $A=(2,2,-1)$, $B=(4,1,1)$, $\sphericalangle AOB=$ ....

b) $A=(2,2,-1)$, $B=(2,-1,2)$, $\sphericalangle AOB=$ ....

c) $A=(1,-1,0)$, $B=(0,1,-1)$, $\sphericalangle AOB=$ ....

d) $A=(1,1,0)$, $B=(0,1,1)$, $\sphericalangle AOB=$ ....

11. Mamy dwie zewnętrznie nieodróżnialne monety: prawdziwą i fałszywą. Przy rzucie monetą prawdziwą orzeł wypada z prawdopodobieństwem $1/2$, a przy rzucie monetą fałszywą z prawdopodobieństwem p. Wylosowano (z równym prawdopodobieństwem) jedną z monet, a następnie wykonano nią rzut. Okazało się, że wypadł orzeł. Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo (warunkowe), że wylosowana moneta jest prawdziwa. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3/4)=$ .... **b)** $P(1/4)=$ ....

c) $P(1/3)=$ .... **d)** $P(2/3)=$ ....

12. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w poszczególnych rzutach jest podzielny przez n. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(3)=$ .... **b)** $P(5)=$ ....

c) $P(6)=$ .... **d)** $P(2)=$ ....