

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
26 czerwca 2018 r.

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$

jest zbieżny.

Zadanie 2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$$

na kuli

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie 3. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$x' = y, \quad y' = -x$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Zadanie 4. Macierz kwadratowa A rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych ma wartości własne 1 i 2. Czy stąd wynika, że dla każdego wektora v długości 1, wektor Av ma długość mniejszą od 2018?

Zadanie 5. W grupie nieabelowej G dane są elementy a i b rzędu 2. Dowieść, że rzędy elementów ab i ba są równe.

Zadanie 6. Arek, Berek, Czarek i Darek grają w następującą grę. W pojedynczej rozgrywce każdy z graczy wpłaca do puli 3 złote i typuje wynik rzutu monetą. Po wykonaniu rzutu pula jest dzielona po równo między graczy, którzy trafnie przewidzieli wynik. Arek i Berek zawsze typują orła, Czarek zawsze typuje reszkę, a Darek losowo orła lub reszkę (każde z prawdopodobieństwem $1/2$).

Wyznaczyć wartość oczekiwaną wygranej/przegranej netto każdego z graczy w pojedynczej rozgrywce.