EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2018r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niezależne szkody mają rozkłady $P(X_i = k) = exp(-1)/k!$, $P(Y_i = k) = \binom{4+k}{k}(1/3)^5(2/3)^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Niech $S = X_1 + ... + X_{500} + Y_1 + ... + Y_{500}$. Składka pobierana od szkody S jest postaci $(1+\theta)ES$, dla pewnej stałej $\theta > 0$. Wylicz wartość tej stałej, aby szansa, że zebrana składka od wszystkich 1000 szkód pokryje szkodę wynosiła 0.95.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Wiedząc, że $\mu_{[20]+t} = t$, oblicz $\mathring{e}_{20}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu walki z pewnym szczepem bakterii wdrożono procedurę leczenia polegającą na wykorzystaniu dwóch rodzajów antybiotyków. Pierwszy antybiotyk z prawdopodobieństwem α zabija te bakterie. Jeżeli pierwszy antybiotyk nie zadziała to stosuje się drugi z antybiotyków, który z prawdopodobieństwem α jest w stanie zabić bakterie. Prawdopodobieństwo α jest nieznane. Przeprowadzono 100 niezależnych eksperymentów, w wyniku których 40 prób zakończyło się zabiciem bakterii już po zastosowaniu pierwszego antybiotyku, a 20 eksperymentów po zastosowaniu dwóch antybiotyków.

(a) Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru α.

(b) Oblicz jego wartość dla danych z zadania.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2018\}$ i parzystą na D, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in D$. Wykazać, że dla każdej krzywej γ regularnej zamkniętej, zawartej w D i każdego $z_0 \in D$ takiego, że z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2018r
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dany jest trójkąt ABC i punkt D który jest środkiem boku BC. Udowodnić, że

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BC^2.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech n będzie daną liczbą naturalną. Rozwiąż równanie

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{x} - \sqrt{x - 1}.$$

Uzasadnij, że x jest liczbą naturalną.

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu walki z pewnym szczepem bakterii wdrożono procedurę leczenia polegającą na wykorzystaniu dwóch rodzajów antybiotyków. Pierwszy antybiotyk z prawdopodobieństwem α zabija te bakterie. Jeżeli pierwszy antybiotyk nie zadziała to stosuje się drugi z antybiotyków, który z prawdopodobieństwem α jest w stanie zabić bakterie. Prawdopodobieństwo α jest nieznane. Przeprowadzono 100 niezależnych eksperymentów, w wyniku których 40 prób zakończyło się zabiciem bakterii już po zastosowaniu pierwszego antybiotyku, a 20 eksperymentów po zastosowaniu dwóch antybiotyków.

(a) Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru α.

(b) Oblicz jego wartość dla danych z zadania.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2018\}$ i parzystą na D, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in D$. Wykazać, że dla każdej krzywej γ regularnej zamkniętej, zawartej w D i każdego $z_0 \in D$ takiego, że z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2018r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dane są niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie $X, X_1, X_2, \ldots$ i $\mathrm{E}X = 0$, $0 < \mathrm{Var}X = \sigma^2 < \infty$. Podać granicę (liczbę) w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_1 + \ldots + X_n|}{n^\alpha} > \sigma\right).$$

Uzasadnić wynik. W załączeniu tablica dystrybuanty standardowego rozkładu normlanego.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że proces $X_t = \int_0^t dB_s$, gdzie B_t jest ruchem Browna, opisuje stan naszego konta. Oblicz jaki będzie średni stan konta w chwili $t = 4$ przy założeniu, że wiemy ile było na koncie w chwili $t = 2$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech U_1, U_2, U_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$. Obserwujemy zmienną losową X. Testujemy hipotezę

$$H_0 : X \text{ ma taki sam rozkład jak } \min\{U_1, U_2, U_3\}$$

przeciwko

$$H_1 : X \text{ ma taki sam rozkład jak } \min\{U_1, U_2\}.$$

Wyznaczyć moc testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności $\alpha = 0.125$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2018\}$ i parzystą na D, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in D$. Wykazać, że dla każdej krzywej γ regularnej zamkniętej, zawartej w D i każdego $z_0 \in D$ takiego, że

z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2018r
Matematyka stosowana

Zadanie **1. (8 punktów)**
Załóżmy, że populacja w obecności drapieżników rozwija się zgodnie z równaniem
$$\frac{dN}{dt} = N\,(1-N) - \frac{aN}{1+bN}, \quad a,b>0.$$

(a) Wyznacz stany stacjonarne.

(b) Określ stabilność wyznaczonych stanów stacjonarnych.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozpatrzmy następujący model mutacji nici DNA. Każdy nukleotydy podlega mutacji w sposób niezależny od pozostałych nukleotydów. Przy każdej replikacji nici DNA, każdy z czterech nukleotydów **A,C,G,T** może zostać zastąpiony przez nukleotyd innego typu z tym samym ustalonym prawdopodobieństwem α.

(a) Zaproponuj model matematyczny opisujący tak opisany proces mutacji.

(b) Załóżmy, że w wybranym miejscu nici DNA znajduje się początkowo nukleotyd **C**. Jaka jest średnia liczba replikacji do momentu pojawienia się nukleotydu **G** w tym ustalonym miejscu nici DNA?

(c) Zakładamy, że nić DNA podlegała bardzo dużej liczbie replikacji. Jakiej częstości poszczególnych nukleotydów możemy się wtedy spodziewać w jej składzie?

Zadanie **3. (8 punktów)**
W celu walki z pewnym szczepem bakterii wdrożono procedurę leczenia polegającą na wykorzystaniu dwóch rodzajów antybiotyków. Pierwszy antybiotyk z prawdopodobieństwem α zabija te bakterie. Jeżeli pierwszy antybiotyk nie zadziała to stosuje się drugi z antybiotyków, który z prawdopodobieństwem

α jest w stanie zabić bakterie. Prawdopodobieństwo α jest nieznane. Przeprowadzono 100 niezależnych eksperymentów, w wyniku których 40 prób zakończyło się zabiciem bakterii już po zastosowaniu pierwszego antybiotyku, a 20 eksperymentów po zastosowaniu dwóch antybiotyków.

(a) Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru α.

(b) Oblicz jego wartość dla danych z zadania.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2018\}$ i parzystą na D, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in D$. Wykazać, że dla każdej krzywej γ regularnej zamkniętej, zawartej w D i każdego $z_0 \in D$ takiego, że z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2018r
Analiza danych

Zadanie **1. (8 punktów)**

Przeprowadzono badania liczby kilokalorii spożywanych dziennie przez niemowlęta w zależności od kraju. Pomiary podsumowano w tabeli z lewej strony.

kraj	n	średnia	s
Egipt	88	1217	327
Kenia	111	844	184
Meksyk	52	1119	285

Źródło	df	SS	MS
Pomiędzy grupami		7328556	
Wewnątrz grup			
Całkowite			

1. Oblicz i wypełnij powyższą tabelę ANOVY:
2. Oblicz odpowiednią statystykę testową F:
3. Podaj wartość krytyczną na poziomie istotności 0.05:
4. Zinterpretuj uzyskane wyniki w profesjonalny i komunikatywny sposób:

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, \ldots, 10$, odpowiednio. Rozważamy problem testowania zbioru hipotez

$$\{H_{0i} : \mu_i = 0,\ H_{1i} : \mu_i > 0,\ \ i = 1, \ldots, 10\}.$$

Zaobserwowano:

$$1.374, 2.184, 1.164, 3.595, 2.330, 1.180, 2.487, 2.738, 2.576, 1.695.$$

Które z hipotez można odrzucić:
(i) aby kontrolować błąd I-ego rodzaju dla każdego z testów na poziomie istotności $\alpha = 0.1$?
(ii) aby kontrolować $FWER$ na poziomie 0.1 ?
(iii) aby kontrolować FDR na poziomie 0.1?

	Kwantyle									
Rozkład	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$N(0,1)$	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu walki z pewnym szczepem bakterii wdrożono procedurę leczenia polegającą na wykorzystaniu dwóch rodzajów antybiotyków. Pierwszy antybiotyk z prawdopodobieństwem α zabija te bakterie. Jeżeli pierwszy antybiotyk nie zadziała to stosuje się drugi z antybiotyków, który z prawdopodobieństwem α jest w stanie zabić bakterie. Prawdopodobieństwo α jest nieznane. Przeprowadzono 100 niezależnych eksperymentów, w wyniku których 40 prób zakończyło się zabiciem bakterii już po zastosowaniu pierwszego antybiotyku, a 20 eksperymentów po zastosowaniu dwóch antybiotyków.

(a) Podaj wzór na estymator największej wiarogodności parametru α.

(b) Oblicz jego wartość dla danych z zadania.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2018\}$ i parzystą na D, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in D$. Wykazać, że dla każdej krzywej γ regularnej zamkniętej, zawartej w D i każdego $z_0 \in D$ takiego, że z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$