EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
8 lutego 2018 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} \binom{3n}{n} x^{3n} .$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

na sferze jednostkowej

$$\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t) \cdot (1 - x(t)), \qquad x(0) = -1.$$

Zadanie **4.** Macierz kwadratowa A o wyrazach rzeczywistych spełnia równość $A^2 = A$. Dowieść, że każda rzeczywista wartość własna macierzy A jest równa 0 lub 1.

Zadanie **5.** Dana jest grupa nieabelowa G oraz takie jej elementy a, b, że:

- rząd elementu a jest równy 5,
- element b nie jest elementem neutralnym,
- zachodzi równość $ba = ab^2$.

Wyznaczyć rząd elementu b.

Zadanie **6.** Dysponujemy dwiema zewnętrznie nierozróżnialnymi monetami, o których wiemy, że jedna jest prawdziwa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe 1/2), a druga fałszywa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe 1/3). Wybraliśmy losowo jedną z tych monet, a następnie wykonaliśmy nią 12 rzutów. Okazało się, że wypadło 5 orłów.

Co jest bardziej prawdopodobne: to że wylosowana moneta jest prawdziwa, czy że jest fałszywa?

Wskazówka: W rozwiązaniu można skorzystać z zamieszczonej obok tabeli potęg dwójki i trójki mniejszych od miliona.

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	6561
9	512	19683
10	1024	59049
11	2048	177147
12	4096	531441
13	8192	
14	16384	
15	32768	
16	65536	
17	131072	
18	262144	
19	524288	