1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Określić, czy kres górny należy do zbioru (napisać **T** lub **TAK** albo **N** lub **NIE**)

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 8n^2\right\}=\mathbf{2\sqrt{2}}$ czy należy **NIE**

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3}$ czy należy **TAK**

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 8^n\right\}=\mathbf{3}$ czy należy **TAK**

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^m\leqslant 9^n\right\}=\mathbf{\log_2 9=2\cdot\log_2 3}$

czy należy **NIE**

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{3n}}{n}$, $\quad \mathbf{\left[-1/4,\, 1/4\right)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{2n}}{n}$, $\quad \mathbf{\left(-1/8,\, 1/8\right)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^{n}}{n^2}$, $\quad \mathbf{\left[-1/3,\, 1/3\right]}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^{n}$, $\quad \mathbf{\left(-1/2,\, 1/2\right)}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^k+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^4}}$, $\quad (-\infty, \mathbf{3/2})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{\sqrt[3]{n^4+n^3}}$, $\quad (-\infty, \mathbf{2/3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^k+1}}{\sqrt[6]{n^{10}+n^6}}$, $\quad (-\infty, \mathbf{10/3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^k+1}}{\sqrt[5]{n^8+n^5}}$, $\quad (-\infty, \mathbf{12/5})$

4. Podać wartość rzeczywistą parametru A, dla której podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_4^{\infty} \frac{A}{x}+\frac{4}{x+4}+\frac{Ax}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-2}$

b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}+\frac{A}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-2}$

c) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}+\frac{Ax}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-3}$

d) $\int\limits_3^{\infty} \frac{A}{x}+\frac{3}{x+3}+\frac{x}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-4}$

5. Funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x,y)=(x+2y)^3$. Podać wartość odpowiedniej pochodnej cząstkowej trzeciego rzędu.

a) $f'''_{xxx}(0,0)=\mathbf{6}$ **b)** $f'''_{xyy}(0,0)=\mathbf{24}$

c) $f'''_{xxy}(0,0)=\mathbf{12}$ **d)** $f'''_{yyy}(0,0)=\mathbf{48}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać taką liczbę całkowitą dodatnią n oraz liczbę rzeczywistą x, że $z^n = x$, a przy tym n jest możliwie najmniejsze.

a) $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i, \quad n = \mathbf{3}, \quad x = \mathbf{8}$

b) $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i, \quad n = \mathbf{3}, \quad x = \mathbf{-8}$

c) $z = 1 + i, \quad n = \mathbf{4}, \quad x = \mathbf{-4}$

d) $z = \sqrt{3} + i, \quad n = \mathbf{6}, \quad x = \mathbf{-64}$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{6}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{9}$

c) $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 49 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{77}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & p \end{pmatrix}, \quad p = \mathbf{3}$

8. Dla podanej liczby a wskazać liczbę rzeczywistą b o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1,2,4)$ oraz $(1,3,9)$, rozwiązaniem tego układu jest także $(1,a,b)$.

a) $a = 7, \quad b = \mathbf{29}$

b) $a = 6, \quad b = \mathbf{24}$

c) $a = 5, \quad b = \mathbf{19}$

d) $a = 4, \quad b = \mathbf{14}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 18\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 19. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{4}$ **b)** $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{13}$

c) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{10}$ **d)** $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{5}$

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu n. Wówczas.

a) $E(27)=\mathbf{18}$ **b)** $E(25)=\mathbf{20}$

c) $E(12)=\mathbf{4}$ **d)** $E(19)=\mathbf{18}$

11. Rzucamy n razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{5/54}$ **b)** $P(2)=\mathbf{5/6}$

c) $P(3)=\mathbf{5/9}$ **d)** $P(4)=\mathbf{5/18}$

12. Wybieramy losowo dwa różne wierzchołki n-kąta foremnego. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że odcinek łączący te wierzchołki jest krótszy od promienia okręgu opisanego na n-kącie. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(11)=\mathbf{1/5}$ **b)** $P(12)=\mathbf{2/11}$

c) $P(13)=\mathbf{1/3}$ **d)** $P(7)=\mathbf{1/3}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Określić, czy kres górny należy do zbioru (napisać **T** lub **TAK** albo **N** lub **NIE**)

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^m \leqslant 8^n\right\} = \mathbf{3}$ czy należy **TAK**

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2 \leqslant 9n^2\right\} = \mathbf{3}$ czy należy **TAK**

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2 \leqslant 8n^2\right\} = \mathbf{2\sqrt{2}}$ czy należy **NIE**

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^m \leqslant 9^n\right\} = \mathbf{\log_2 9 = 2\cdot\log_2 3}$

czy należy **NIE**

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n,$ $\quad \mathbf{\left(-1/2,\, 1/2\right)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2},$ $\quad \mathbf{\left[-1/3,\, 1/3\right]}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{64^n \cdot x^{3n}}{n},$ $\quad \mathbf{\left[-1/4,\, 1/4\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{64^n \cdot x^{2n}}{n},$ $\quad \mathbf{\left(-1/8,\, 1/8\right)}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^k+1}}{\sqrt[6]{n^{10}+n^6}}$, $\quad (-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{10/3})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^k+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^4}}$, $\quad (-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{3/2})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{\sqrt[3]{n^4+n^3}}$, $\quad (-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{2/3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^k+1}}{\sqrt[5]{n^8+n^5}}$, $\quad (-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{12/5})$

4. Podać wartość rzeczywistą parametru A, dla której podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_4^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{4}{x+4} + \frac{Ax}{x^2+1}\, dx$, $\quad A = \mathbf{-2}$

b) $\int\limits_3^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{3}{x+3} + \frac{x}{x^2+1}\, dx$, $\quad A = \mathbf{-4}$

c) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{Ax}{x^2+1}\, dx$, $\quad A = \mathbf{-3}$

d) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{A}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}\, dx$, $\quad A = \mathbf{-2}$

5. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x,y) = (x+2y)^3$. Podać wartość odpowiedniej pochodnej cząstkowej trzeciego rzędu.

a) $f'''_{yyy}(0,0) = \mathbf{48}$ **b)** $f'''_{xyy}(0,0) = \mathbf{24}$

c) $f'''_{xxy}(0,0) = \mathbf{12}$ **d)** $f'''_{xxx}(0,0) = \mathbf{6}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać taką liczbę całkowitą dodatnią n oraz liczbę rzeczywistą x, że $z^n = x$, a przy tym n jest możliwie najmniejsze.

a) $z = 1+\sqrt{3}\cdot i$, $\quad n = \mathbf{3}$, $\quad x = -\mathbf{8}$

b) $z = \sqrt{3}+i$, $\quad n = \mathbf{6}$, $\quad x = -\mathbf{64}$

c) $z = -1+\sqrt{3}\cdot i$, $\quad n = \mathbf{3}$, $\quad x = \mathbf{8}$

d) $z = 1+i$, $\quad n = \mathbf{4}$, $\quad x = -\mathbf{4}$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{6}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{9}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{3}$

d) $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 49 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{77}$

8. Dla podanej liczby a wskazać liczbę rzeczywistą b o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1,2,4)$ oraz $(1,3,9)$, rozwiązaniem tego układu jest także $(1,a,b)$.

a) $a = 4$, $\quad b = \mathbf{14}$

b) $a = 6$, $\quad b = \mathbf{24}$

c) $a = 5$, $\quad b = \mathbf{19}$

d) $a = 7$, $\quad b = \mathbf{29}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 18\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 19. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g = 3, \quad g^{-1} = \mathbf{13}$ **b)** $g = 4, \quad g^{-1} = \mathbf{5}$

c) $g = 2, \quad g^{-1} = \mathbf{10}$ **d)** $g = 5, \quad g^{-1} = \mathbf{4}$

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu n. Wówczas.

a) $E(19) = \mathbf{18}$ **b)** $E(27) = \mathbf{18}$

c) $E(25) = \mathbf{20}$ **d)** $E(12) = \mathbf{4}$

11. Rzucamy n razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4) = \mathbf{5/18}$ **b)** $P(5) = \mathbf{5/54}$

c) $P(3) = \mathbf{5/9}$ **d)** $P(2) = \mathbf{5/6}$

12. Wybieramy losowo dwa różne wierzchołki n-kąta foremnego. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że odcinek łączący te wierzchołki jest krótszy od promienia okręgu opisanego na n-kącie. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(11) = \mathbf{1/5}$ **b)** $P(12) = \mathbf{2/11}$

c) $P(7) = \mathbf{1/3}$ **d)** $P(13) = \mathbf{1/3}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Określić, czy kres górny należy do zbioru (napisać **T** lub **TAK** albo **N** lub **NIE**)

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ 2^m\leqslant 8^n\right\}=\mathbf{3}$ czy należy **TAK**

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ m^2\leqslant 8n^2\right\}=\mathbf{2\sqrt{2}}$ czy należy **NIE**

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ 2^m\leqslant 9^n\right\}=\mathbf{\log_2 9=2\cdot\log_2 3}$

czy należy **NIE**

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ m^2\leqslant 9n^2\right\}=\mathbf{3}$ czy należy **TAK**

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{3n}}{n}$, $\quad\mathbf{\left[-1/4,\ 1/4\right)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^{n}}{n^2}$, $\quad\mathbf{\left[-1/3,\ 1/3\right]}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^{n}$, $\quad\mathbf{\left(-1/2,\ 1/2\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{2n}}{n}$, $\quad\mathbf{\left(-1/8,\ 1/8\right)}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{\sqrt[3]{n^4+n^3}}$, $(-\infty, \mathbf{2/3})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^k+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^4}}$, $(-\infty, \mathbf{3/2})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^k+1}}{\sqrt[6]{n^{10}+n^6}}$, $(-\infty, \mathbf{10/3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^k+1}}{\sqrt[5]{n^8+n^5}}$, $(-\infty, \mathbf{12/5})$

4. Podać wartość rzeczywistą parametru A, dla której podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{4}{x+4} + \frac{Ax}{x^2+1}\, dx$, $A = \mathbf{-2}$

b) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{Ax}{x^2+1}\, dx$, $A = \mathbf{-3}$

c) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{3}{x+3} + \frac{x}{x^2+1}\, dx$, $A = \mathbf{-4}$

d) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{A}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}\, dx$, $A = \mathbf{-2}$

5. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x,y) = (x+2y)^3$. Podać wartość odpowiedniej pochodnej cząstkowej trzeciego rzędu.

a) $f'''_{xxy}(0,0) = \mathbf{12}$ **b)** $f'''_{xxx}(0,0) = \mathbf{6}$

c) $f'''_{yyy}(0,0) = \mathbf{48}$ **d)** $f'''_{xyy}(0,0) = \mathbf{24}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać taką liczbę całkowitą dodatnią n oraz liczbę rzeczywistą x, że $z^n = x$, a przy tym n jest możliwie najmniejsze.

a) $z=1+\sqrt{3}\cdot i, \quad n=\mathbf{3}, \quad x=-\mathbf{8}$

b) $z=\sqrt{3}+i, \quad n=\mathbf{6}, \quad x=-\mathbf{64}$

c) $z=-1+\sqrt{3}\cdot i, \quad n=\mathbf{3}, \quad x=\mathbf{8}$

d) $z=1+i, \quad n=\mathbf{4}, \quad x=-\mathbf{4}$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{9}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{3}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{6}$

d) $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 49 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{77}$

8. Dla podanej liczby a wskazać liczbę rzeczywistą b o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1,2,4)$ oraz $(1,3,9)$, rozwiązaniem tego układu jest także $(1,a,b)$.

a) $a=7, \quad b=\mathbf{29}$

b) $a=6, \quad b=\mathbf{24}$

c) $a=5, \quad b=\mathbf{19}$

d) $a=4, \quad b=\mathbf{14}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,18\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 19. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3, \quad g^{-1}=\mathbf{13}$ **b)** $g=5, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$

c) $g=2, \quad g^{-1}=\mathbf{10}$ **d)** $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{5}$

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu n. Wówczas.

a) $E(12)=\mathbf{4}$ **b)** $E(27)=\mathbf{18}$

c) $E(25)=\mathbf{20}$ **d)** $E(19)=\mathbf{18}$

11. Rzucamy n razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{5/54}$ **b)** $P(3)=\mathbf{5/9}$

c) $P(2)=\mathbf{5/6}$ **d)** $P(4)=\mathbf{5/18}$

12. Wybieramy losowo dwa różne wierzchołki n-kąta foremnego. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że odcinek łączący te wierzchołki jest krótszy od promienia okręgu opisanego na n-kącie. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(12)=\mathbf{2/11}$ **b)** $P(13)=\mathbf{1/3}$

c) $P(7)=\mathbf{1/3}$ **d)** $P(11)=\mathbf{1/5}$

1. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Określić, czy kres górny należy do zbioru (napisać **T** lub **TAK** albo **N** lub **NIE**)

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ m^2\leqslant 8n^2\right\} = \mathbf{2\sqrt{2}}$ czy należy **NIE**

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ 2^m\leqslant 9^n\right\} = \mathbf{\log_2 9 = 2\cdot\log_2 3}$
czy należy **NIE**

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ m^2\leqslant 9n^2\right\} = \mathbf{3}$ czy należy **TAK**

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \ \wedge\ 2^m\leqslant 8^n\right\} = \mathbf{3}$ czy należy **TAK**

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{3n}}{n}$, $\quad\mathbf{[-1/4,\, 1/4)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n$, $\quad\mathbf{(-1/2,\, 1/2)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64^n\cdot x^{2n}}{n}$, $\quad\mathbf{(-1/8,\, 1/8)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n^2}$, $\quad\mathbf{[-1/3,\, 1/3]}$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^k+1}}{\sqrt[6]{n^{10}+n^6}}$, $\quad(-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{10/3})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^k+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^4}}$, $\quad(-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{3/2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^k+1}}{\sqrt[5]{n^8+n^5}}$, $\quad(-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{12/5})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^k+1}}{\sqrt[3]{n^4+n^3}}$, $\quad(-\boldsymbol{\infty}, \mathbf{2/3})$

4. Podać wartość rzeczywistą parametru A, dla której podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{A}{x}+\frac{4}{x+4}+\frac{Ax}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-2}$

b) $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{A}{x}+\frac{3}{x+3}+\frac{x}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-4}$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}+\frac{A}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-2}$

d) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}+\frac{Ax}{x^2+1}\,dx$, $\quad A=\mathbf{-3}$

5. Funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x,y)=(x+2y)^3$. Podać wartość odpowiedniej pochodnej cząstkowej trzeciego rzędu.

a) $f'''_{xxy}(0,0)=\mathbf{12}$　　**b)** $f'''_{xxx}(0,0)=\mathbf{6}$

c) $f'''_{xyy}(0,0)=\mathbf{24}$　　**d)** $f'''_{yyy}(0,0)=\mathbf{48}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać taką liczbę całkowitą dodatnią n oraz liczbę rzeczywistą x, że $z^n = x$, a przy tym n jest możliwie najmniejsze.

a) $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$, $\quad n = \mathbf{3}$, $\quad x = -\mathbf{8}$

b) $z = \sqrt{3} + i$, $\quad n = \mathbf{6}$, $\quad x = -\mathbf{64}$

c) $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$, $\quad n = \mathbf{3}$, $\quad x = \mathbf{8}$

d) $z = 1 + i$, $\quad n = \mathbf{4}$, $\quad x = -\mathbf{4}$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 49 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{77}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{9}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{3}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{6}$

8. Dla podanej liczby a wskazać liczbę rzeczywistą b o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są $(1, 2, 4)$ oraz $(1, 3, 9)$, rozwiązaniem tego układu jest także $(1, a, b)$.

a) $a = 7$, $\quad b = \mathbf{29}$

b) $a = 6$, $\quad b = \mathbf{24}$

c) $a = 5$, $\quad b = \mathbf{19}$

d) $a = 4$, $\quad b = \mathbf{14}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 18\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 19. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{4}$ **b)** $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{10}$

c) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{13}$ **d)** $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{5}$

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie cyklicznej rzędu n. Wówczas.

a) $E(19)=\mathbf{18}$ **b)** $E(12)=\mathbf{4}$

c) $E(27)=\mathbf{18}$ **d)** $E(25)=\mathbf{20}$

11. Rzucamy n razy kostką do gry. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5)=\mathbf{5/54}$ **b)** $P(4)=\mathbf{5/18}$

c) $P(2)=\mathbf{5/6}$ **d)** $P(3)=\mathbf{5/9}$

12. Wybieramy losowo dwa różne wierzchołki n-kąta foremnego. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że odcinek łączący te wierzchołki jest krótszy od promienia okręgu opisanego na n-kącie. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(13)=\mathbf{1/3}$ **b)** $P(12)=\mathbf{2/11}$

c) $P(11)=\mathbf{1/5}$ **d)** $P(7)=\mathbf{1/3}$