EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
21 czerwca 2017 r.

Zadanie **1.** Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, przy czym $f''(x)=1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 0$. Ponadto wiadomo, że

$$f(-3)=-3, \qquad f(-1)=-1, \qquad f(1)=1\,.$$

Wyznaczyć $f(5)$.

Zadanie **2.** Wyznaczyć największą wartość funkcji

$$f(x,y)=x+8y$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y):\, x^4+y^4=1\right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartość największa jest osiągana.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t)=y(t), \qquad y'(t)=x(t), \qquad x(0)=2, \qquad y(0)=0.$$

Zadanie **4.** Niech I oznacza macierz identycznościową rozmiaru 7×7. Rozwiązać jedno z dwóch poniższych zadań.

a) (wersja za 20 punktów) Podać przykład takiej macierzy kwadratowej $A\neq I$ rozmiaru 7×7 o wyrazach całkowitych, że $A^5=I$.

b) (wersja za 10 punktów) Podać przykład takiej macierzy kwadratowej $A\neq I$ rozmiaru 7×7 o wyrazach rzeczywistych, że $A^5=I$.

Zadanie **5.** Rozwiązać jedno z dwóch poniższych zadań.

a) (wersja za 20 punktów) Podać przykład grupy skończonej (niekoniecznie przemiennej), w której liczba elementów rzędu 2 jest równa 5.

b) (wersja za 10 punktów) Podać przykład grupy skończonej (niekoniecznie przemiennej), w której liczba elementów rzędu 2 jest większa od 4.

Zadanie **6.** Gracz rzuca kostką do gry. Po obejrzeniu wyniku rzutu gracz może go zaakceptować albo zapłacić złotówkę za unieważnienie rzutu i wykonać rzut ponownie. W tym drugim przypadku po wykonaniu drugiego rzutu gracz może zaakceptować jego wynik albo zapłacić kolejną złotówkę za unieważnienie drugiego rzutu. I tak dalej: gracz może dowolną liczbę razy płacić po złotówce za unieważnianie kolejnych rzutów, a rozgrywka kończy się, gdy gracz w końcu zaakceptuje wynik ostatniego rzutu. Na zakończenie rozgrywki gracz otrzymuje od kasyna wypłatę w złotówkach równą liczbie oczek wyrzuconych w zaakceptowanym rzucie.

Rozstrzygnąć, która z poniższych stategii jest dla gracza bardziej opłacalna z punktu widzenia zmaksymalizowania wartości oczekiwanej wygranej netto w pojedynczej rozgrywce:

- unieważniać 1 i 2 oczka, akceptować 3, 4, 5 i 6 oczek,
- unieważniać 1, 2 i 3 oczka, akceptować 4, 5 i 6 oczek.