1. Wskazać taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna.

a) $\sqrt[10]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2},\qquad w=\mathbf{-1}$

b) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2},\qquad w=\mathbf{2}$

c) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3},\qquad w=\mathbf{1}$

d) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3},\qquad w=\mathbf{4}$

2. Zapisać wartość podanej całki w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\int\limits_{-1}^{1/\sqrt{3}}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{5/12}$

b) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{7/12}$

c) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{3/4}$

d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{1}$

3. Podać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$

b) $f(x)=\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$

c) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)}$

d) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, $\quad R=\mathbf{4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot x^{2n}$, $\quad R=\mathbf{\frac{1}{2}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^{2n}}{n!}$, $\quad R=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $\quad R=\mathbf{e}$

5. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/2}$

b) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/6}$

c) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+4n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/4}$

d) $\sup\left\{\dfrac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/12}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że $(z+1)^n$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=i$, $n=\mathbf{8}$

b) $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $n=\mathbf{12}$

c) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$, $n=\mathbf{24}$

d) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $n=\mathbf{16}$

7. Niech $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dla podanej macierzy wypisać jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) A **−2, 1, 2**

b) A^2 **1, 4, 4**

c) A^{-1} **−1/2, 1/2, 1**

d) A^3 **−8, 1, 8**

8. Wskazać takie liczby a i b, aby podane 3 punkty w $\mathbb{R}^3$ były współliniowe.

a) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(1,a,b)$, $a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{-2}$

b) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,b,64)$, $a=\mathbf{12}$, $b=\mathbf{33}$

c) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,27,b)$, $a=\mathbf{10}$, $b=\mathbf{52}$

d) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(8,a,b)$, $a=\mathbf{21}$, $b=\mathbf{40}$

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *odlotową*, jeżli w grupie permutacji S_{n-1} nie istnieje element rzędu n. Dla podanych liczb a i b wypisać wszystkie liczby *odlotowe* n spełniające nierówności $a<n<b$.

a) $a=60$, $b=70$, **61, 64, 67**

b) $a=30$, $b=40$, **31, 32, 37**

c) $a=20$, $b=30$, **23, 25, 27, 29**

d) $a=40$, $b=50$, **41, 43, 47, 49**

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 31. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=7$, $g^{-1}=\mathbf{9}$

b) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{8}$

c) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$

d) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{21}$

11. Liczbę naturalną n nazwiemy *wyjątkową*, jeżeli przy n-krotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej jednego orła jest odwrotnością liczby całkowitej. Dla podanej liczby k podać najmniejszą liczbę *wyjątkową* n większą od k.

a) $k=100$, $n=\mathbf{127}$

b) $k=10$, $n=\mathbf{15}$

c) $k=20$, $n=\mathbf{31}$

d) $k=50$, $n=\mathbf{63}$

12. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b,c)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano trzy kule białe. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4,1)=\mathbf{2/5}$

b) $P(5,1)=\mathbf{1/2}$

c) $P(6,4)=\mathbf{1/6}$

d) $P(3,1)=\mathbf{1/4}$

1. Wskazać taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna.

a) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}, \qquad w=\mathbf{1}$

b) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}, \qquad w=\mathbf{2}$

c) $\sqrt[10]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}, \qquad w=\mathbf{-1}$

d) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}, \qquad w=\mathbf{4}$

2. Zapisać wartość podanej całki w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{1}$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{3/4}$

c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{5/12}$

d) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{7/12}$

3. Podać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \boldsymbol{(-\infty,\,-2)\cup(2,\,+\infty)}$

b) $f(x)=\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \boldsymbol{(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)}$

c) $f(x)=\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \boldsymbol{(-\infty,\,0)\cup(0,\,+\infty)}$

d) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \boldsymbol{\left(-\infty,\,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\,+\infty\right)}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, $\quad R=\mathbf{4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $\quad R=\mathbf{e}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^{2n}}{n!}$, $\quad R=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot x^{2n}$, $\quad R=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

5. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\dfrac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/12}$

b) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/6}$

c) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+4n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/4}$

d) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/2}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że $(z+1)^n$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $n=\mathbf{12}$

b) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $n=\mathbf{16}$

c) $z=i$, $n=\mathbf{8}$

d) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $n=\mathbf{24}$

7. Niech $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dla podanej macierzy wypisać jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) A **−2, 1, 2**

b) A^2 **1, 4, 4**

c) A^3 **−8, 1, 8**

d) A^{-1} **−1/2, 1/2, 1**

8. Wskazać takie liczby a i b, aby podane 3 punkty w $\mathbb{R}^3$ były współliniowe.

a) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(8,a,b)$, $a=\mathbf{21}$, $b=\mathbf{40}$

b) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,b,64)$, $a=\mathbf{12}$, $b=\mathbf{33}$

c) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,27,b)$, $a=\mathbf{10}$, $b=\mathbf{52}$

d) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(1,a,b)$, $a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{-2}$

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *odlotową*, jeżli w grupie permutacji S_{n-1} nie istnieje element rzędu n. Dla podanych liczb a i b wypisać wszystkie liczby *odlotowe* n spełniające nierówności $a<n<b$.

a) $a=30$, $b=40$, **31, 32, 37**

b) $a=40$, $b=50$, **41, 43, 47, 49**

c) $a=20$, $b=30$, **23, 25, 27, 29**

d) $a=60$, $b=70$, **61, 64, 67**

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,30\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 31. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{21}$ **b)** $g=7$, $g^{-1}=\mathbf{9}$

c) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{8}$ **d)** $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$

11. Liczbę naturalną n nazwiemy *wyjątkową*, jeżeli przy n-krotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej jednego orła jest odwrotnością liczby całkowitej. Dla podanej liczby k podać najmniejszą liczbę *wyjątkową* n większą od k.

a) $k=50$, $n=\mathbf{63}$ **b)** $k=100$, $n=\mathbf{127}$

c) $k=20$, $n=\mathbf{31}$ **d)** $k=10$, $n=\mathbf{15}$

12. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b,c)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano trzy kule białe. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4,1)=\mathbf{2/5}$ **b)** $P(5,1)=\mathbf{1/2}$

c) $P(3,1)=\mathbf{1/4}$ **d)** $P(6,4)=\mathbf{1/6}$

1. Wskazać taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna.

a) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3},\qquad w=\mathbf{1}$

b) $\sqrt[10]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2},\qquad w=\mathbf{-1}$

c) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3},\qquad w=\mathbf{4}$

d) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2},\qquad w=\mathbf{2}$

2. Zapisać wartość podanej całki w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1/\sqrt{3}}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{5/12}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{3/4}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{1}$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1}\frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{7/12}$

3. Podać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)}$

b) $f(x)=\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)}$

c) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)}$

d) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad \mathbf{\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}, +\infty\right)}$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, $\quad R=\mathbf{4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^{2n}}{n!}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $\quad R=\mathbf{e}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot x^{2n}$, $\quad R=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

5. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+4n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/4}$

b) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/2}$

c) $\sup\left\{\dfrac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/12}$

d) $\sup\left\{\dfrac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/6}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że $(z+1)^n$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\quad n=\mathbf{12}$

b) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\quad n=\mathbf{16}$

c) $z=i$, $\quad n=\mathbf{8}$

d) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\quad n=\mathbf{24}$

7. Niech $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dla podanej macierzy wypisać jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) A^2 **1, 4, 4**

b) A^3 **−8, 1, 8**

c) A **−2, 1, 2**

d) A^{-1} **−1/2, 1/2, 1**

8. Wskazać takie liczby a i b, aby podane 3 punkty w $\mathbb{R}^3$ były współliniowe.

a) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(1,a,b)$, $\quad a=\mathbf{0}$, $\quad b=\mathbf{-2}$

b) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,b,64)$, $\quad a=\mathbf{12}$, $\quad b=\mathbf{33}$

c) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,27,b)$, $\quad a=\mathbf{10}$, $\quad b=\mathbf{52}$

d) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(8,a,b)$, $\quad a=\mathbf{21}$, $\quad b=\mathbf{40}$

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *odlotową*, jeżli w grupie permutacji S_{n-1} nie istnieje element rzędu n. Dla podanych liczb a i b wypisać wszystkie liczby *odlotowe* n spełniające nierówności $a<n<b$.

a) $a=30$, $b=40$, **31, 32, 37**

b) $a=60$, $b=70$, **61, 64, 67**

c) $a=20$, $b=30$, **23, 25, 27, 29**

d) $a=40$, $b=50$, **41, 43, 47, 49**

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,30\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 31. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$ b) $g=7$, $g^{-1}=\mathbf{9}$

c) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{8}$ d) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{21}$

11. Liczbę naturalną n nazwiemy *wyjątkową*, jeżeli przy n-krotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej jednego orła jest odwrotnością liczby całkowitej. Dla podanej liczby k podać najmniejszą liczbę *wyjątkową* n większą od k.

a) $k=100$, $n=\mathbf{127}$ b) $k=20$, $n=\mathbf{31}$

c) $k=10$, $n=\mathbf{15}$ d) $k=50$, $n=\mathbf{63}$

12. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b,c)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano trzy kule białe. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5,1)=\mathbf{1/2}$ b) $P(6,4)=\mathbf{1/6}$

c) $P(3,1)=\mathbf{1/4}$ d) $P(4,1)=\mathbf{2/5}$

1. Wskazać taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna.

a) $\sqrt[10]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}, \qquad w=\mathbf{-1}$

b) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}, \qquad w=\mathbf{4}$

c) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}, \qquad w=\mathbf{2}$

d) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}, \qquad w=\mathbf{1}$

2. Zapisać wartość podanej całki w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{5/12}$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{1}$

c) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{7/12}$

d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi}=\mathbf{3/4}$

3. Podać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

b) $f(x)=\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

c) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, $\quad\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

d) $f(x)=\log_2\left(x^2\right)$, $\quad(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, $\quad R=\mathbf{4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $\quad R=\mathbf{e}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot x^{2n}$, $\quad R=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^{2n}}{n!}$, $\quad R=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{e}}}$

5. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/4}$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/2}$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/6}$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbf{1/12}$

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że $(z+1)^n$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad n=\mathbf{12}$

b) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad n=\mathbf{16}$

c) $z=i, \quad n=\mathbf{8}$

d) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, \quad n=\mathbf{24}$

7. Niech $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dla podanej macierzy wypisać jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) A^{-1} **−1/2, 1/2, 1**

b) A^2 **1, 4, 4**

c) A^3 **−8, 1, 8**

d) A **−2, 1, 2**

8. Wskazać takie liczby a i b, aby podane 3 punkty w $\mathbb{R}^3$ były współliniowe.

a) $(2,3,4), (4,9,16), (1,a,b), \quad a=\mathbf{0}, \quad b=\mathbf{-2}$

b) $(2,3,4), (4,9,16), (a,b,64), \quad a=\mathbf{12}, \quad b=\mathbf{33}$

c) $(2,3,4), (4,9,16), (a,27,b), \quad a=\mathbf{10}, \quad b=\mathbf{52}$

d) $(2,3,4), (4,9,16), (8,a,b), \quad a=\mathbf{21}, \quad b=\mathbf{40}$

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *odlotową*, jeżli w grupie permutacji S_{n-1} nie istnieje element rzędu n. Dla podanych liczb a i b wypisać wszystkie liczby *odlotowe* n spełniające nierówności $a<n<b$.

a) $a=60$, $b=70$, **61, 64, 67**

b) $a=20$, $b=30$, **23, 25, 27, 29**

c) $a=30$, $b=40$, **31, 32, 37**

d) $a=40$, $b=50$, **41, 43, 47, 49**

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 31. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{21}$

b) $g=2$, $g^{-1}=\mathbf{16}$

c) $g=7$, $g^{-1}=\mathbf{9}$

d) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{8}$

11. Liczbę naturalną n nazwiemy *wyjątkową*, jeżeli przy n-krotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej jednego orła jest odwrotnością liczby całkowitej. Dla podanej liczby k podać najmniejszą liczbę *wyjątkową* n większą od k.

a) $k=100$, $n=\mathbf{127}$

b) $k=50$, $n=\mathbf{63}$

c) $k=10$, $n=\mathbf{15}$

d) $k=20$, $n=\mathbf{31}$

12. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b,c)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano trzy kule białe. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(6,4)=\mathbf{1/6}$

b) $P(5,1)=\mathbf{1/2}$

c) $P(4,1)=\mathbf{2/5}$

d) $P(3,1)=\mathbf{1/4}$