EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2017
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozwój wielkości pewnej populacji jest opisany równaniem:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(t)}{(1 + aN(t)^b}, $$

gdzie $N(t)$ jest wielkością populacji w chwili t, natomiast a i b są stałymi.

(i) Wyznacz stany stacjonarne.

(ii) Określ stabilność wyznaczonych stanów stacjonarnych.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dla diploidalnej populacji znajdującej się w warunkach równowagi Hardy'ego-Weinberga, częstość allelu A jest równa p. Wiedząc, że dostosowania genotypów AA, Aa, i aa w tej populacji są w stosunku: $6 : 8 : 4$

(i) wyznacz częstość allelu A w następnym pokoleniu,

(ii) dla jakiej częstości allelu A, częstości genotypów w kolejnych pokoleniach nie ulegają zmianie.

(iii) Załóżmy, że do populacji, w której częstość allelu A jet równa wyznaczonej w punkcie (ii) wartości, migruje jeden osobnik o genotypie aa. Czy spowoduje to, w dłuższej perspektywie czasowej, zmianę częstości allelu A?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X_1, $X_2, ..., X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach dwumianowych $b(n_1, p), ..., b(n_N, p)$ ze znanymi, ale różnymi liczbami doświadczeń, $n_1, ..., n_N$, oraz wspólnym, ale nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu, p, w pojedyńczym doświadczeniu.

(i) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru p.

(ii) Czy wyznaczony w punkcie (i) estymator jest estymatorem nieobciążonym?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem spełniającym warunek

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq c d(a_n, a_{n+1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnej stałej $0 < c < 1$. Pokaż, że:

1. dla $n \geq 2$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) \leq c^n d(a_1, a_2)$;
2. ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli funkcje f i $\bar{f}$ są holomorficzne na niepustym obszarze D, to funkcja f jest funkcją stałą na D.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2017
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

spec. ekonomiczna test HS-0-0

Zadanie **1.** **(8 punktów)**

Dana jest następująca macierz:

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Znajdź rozwiązanie dwuosobowej gry o sumie zero mającej powyższą macierz wypłat.
b) Przyjmując, że M jest macierzą wypłat w grze przeciwko Naturze, wyznacz decyzję optymalną (jedną z pięciu) kierując się kryterium:
optymistów,
minimaksowej straty.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**

Jaka jest oczekiwana liczba osób z populacji miliona 42-latków, które umrą po ukończeniu 43 lat i 3 miesięcy życia i przed ukończeniem 44 lat i 9 miesięcy? Przyjmujemy, że intensywność śmiertelności zmienia się skokowo w rocznicę narodzin i jest stała aż do następnych urodzin. Dane są:

$$q_{42} = 0,01 \quad q_{43} = 0,03 \quad q_{44} = 0,05.$$

Dodatkowo należy przyjąć, że 1 miesiąc to $\frac{1}{12}$ roku.

Zadanie **3.** **(8 punktów)**

Niech X_1, $X_2, ..., X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach dwumianowych $b(n_1, p), ..., b(n_N, p)$ ze znanymi, ale różnymi liczbami doświadczeń, $n_1, ..., n_N$, oraz wspólnym, ale nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu, p, w pojedyńczym doświadczeniu.

(i) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru p.

(ii) Czy wyznaczony w punkcie (i) estymator jest estymatorem nieobciążonym?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem spełniającym warunek

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq cd(a_n, a_{n+1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnej stałej $0 < c < 1$. Pokaż, że:

1. dla $n \geq 2$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) \leq c^n d(a_1, a_2)$;
2. ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli funkcje f i $\bar{f}$ są holomorficzne na niepustym obszarze D, to funkcja f jest funkcją stałą na D.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2017
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Mamy dany kwadrat $ABCD$. Na boku CD wybieramy punkt E. Niech F będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej BE, niech X będzie punktem na prostej AD, ale nie na boku AD, takim że $AX = CE$ niech G będzie punktem przecięcia się prostych BF i AD oraz niech H będzie punktem przecięcia prostych BE i AD. Udowodnić, że kąt XBH jest prosty oraz że $GH = GB = GX$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Liczby Fibonacciego dane są przez rekurencję: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ oraz $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Udowodnij, że dla $n \geq 0$ zachodzi tożsamość:

$$f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach dwumianowych $b(n_1, p), ..., b(n_N, p)$ ze znanymi, ale różnymi liczbami doświadczeń, $n_1, ..., n_N$, oraz wspólnym, ale nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu, p, w pojedyńczym doświadczeniu.

(i) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru p.

(ii) Czy wyznaczony w punkcie (i) estymator jest estymatorem nieobciążonym?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem spełniającym warunek

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq cd(a_n, a_{n+1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnej stałej $0 < c < 1$. Pokaż, że:

1. dla $n \geq 2$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) \leq c^n d(a_1, a_2)$;
2. ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli funkcje f i $\bar{f}$ są holomorficzne na niepustym obszarze D, to funkcja f jest funkcją stałą na D.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2017
Zastosowania

spec. Zastosowania test HS-0-0

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech dla każdego n, zmienne losowe ξ_{nj} $(j = 1, \ldots, n)$ będą niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Niech $a < b$ i definiujemy

$$X_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \xi_{nj} \in (a, b), \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Udowodnić, że ciąg zmiennych losowych

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_{nj}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

zbiega według rozkładu do rozkładu Poissona ze średnią $(b - a)$. Komplet punktów dostaje się za dowód przy użyciu funkcji charakterystycznych.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $(N_t, t \geq 0)$ będzie procesem Poissona o intensywności λ i niech $s, t, h \geq 0$, $t \leq t + h \leq s$. Obliczyć $P(N_{t+h} - N_t = k | N_s = n)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(0, \sigma^2)$. Wyznacz stałą c, tak aby statystyka $Y = c \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ była nieobciążonym estymatorem parametru σ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem spełniającym warunek

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq c d(a_n, a_{n+1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnej stałej $0 < c < 1$. Pokaż, że:

1. dla $n \geq 2$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) \leq c^n d(a_1, a_2)$;

2. ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli funkcje f i $\bar{f}$ są holomorficzne na niepustym obszarze D, to f jest stała na D.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 26.06.2017
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech H będzie podgrupą S_5 rzędu 10. Pokaż, że istnieją $x_1, x_2, \dots x_{12} \in S_5$ takie, że $\{x_1H, \dots, x_{12}H\}$ jest zbiorem warstw lewostronnych a $\{Hx_1, \dots Hx_{12}\}$ jest zbiorem warstw prawostronnych.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $A \in M_{n\times n}(R)$ będzie macierzą symetryczną, i niech

$$\max\{\langle Av, v\rangle \mid v \in R^n, \|v\| \leq 1\} = \langle Aw, w\rangle$$

dla pewnego $w \in R^n, \|w\| = 1$. Udowodnij, że w jest wektorem własnym A.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_k > 0$ dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) Uzasadnij, że

$$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

(b) Jeżli dodatkowo założymy, że $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, to

$$2^n \leq (1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n).$$

[Wskazówka:] W podpunkcie (b) nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną może być pomocna.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem spełniającym warunek

$$d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq cd(a_n, a_{n+1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz pewnej stałej $0 < c < 1$. Pokaż, że:

1. dla $n \geq 2$ mamy $d(a_n, a_{n+1}) \leq c^n d(a_1, a_2)$;

2. ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli funkcje f i $\bar{f}$ są holomorficzne na niepustym obszarze D, to funkcja f jest funkcją stałą na D.