EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
23 lutego 2017 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot x^n}{n^n}.$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$$

na okręgu

$$\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \wedge \ x + y + z = 0\right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = -2y(t), \quad y'(t) = 2x(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Zadanie **4.** Niech I oznacza macierz identycznościową rozmiaru 5×5.
Podać przykład takiej macierzy kwadratowej A rozmiaru 5×5 **o wyrazach całkowitych,** że $A^6 = I$, a przy tym $A^n \neq I$ dla $n = 1,2,3,4,5$. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **5.** Z twierdzenia Sylowa wynika następujący wniosek:
Niech G będzie grupą skończoną, której rząd jest iloczynem różnych liczb pierwszych. Wówczas dla dowolnej liczby pierwszej p będącej dzielnikiem rzędu grupy G, liczba elementów rzędu p w grupie G daje przy dzieleniu przez $p(p-1)$ resztę $p-1$.

Korzystając z powyższego wniosku udowodnić, że każda grupa rzędu 15 jest cykliczna.

Zadanie **6.** W obiegu pieniężnym San Escobar znajduje się 2^{23} monet prawdziwych (z orłem po jednej stronie i reszką po drugiej) oraz jedna moneta fałszywa (z orłami po obu stronach).
Otrzymaliśmy w prezencie monetę przywiezioną z San Escobar i wykonaliśmy nią 20 rzutów — okazało się, że wypadły same orły. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch orłów, gdy rzucimy tą monetą kolejne dwa razy?