EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
13 lutego 2017 r.

Zadanie **1.** Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{13} < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3 < \frac{1}{5}\,.$$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y):\, x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 18x^2 + 18y^2\right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t), \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Zadanie **4.** Niech I oznacza macierz identycznościową rozmiaru 3×3. Rozwiązać jedno z dwóch poniższych zadań.

a) (wersja za 20 punktów) Podać przykład takiej macierzy kwadratowej $A \neq I$ rozmiaru 3×3 o wyrazach całkowitych, że $A^3 = I$.

b) (wersja za 10 punktów) Podać przykład takiej macierzy kwadratowej $A \neq I$ rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych, że $A^3 = I$.

Zadanie **5. a) (6 punktów)** Podać przykład takiej grupy skończonej nieabelowej G oraz takich jej elementów a i b rzędu 2, że element ab ma rząd 3.

b) (14 punktów) Podać przykład takiej grupy skończonej nieabelowej G oraz takich jej elementów a i b rzędu 2, że element ab ma rząd 5.

Zadanie **6.** W obiegu pieniężnym San Escobar znajduje się 2^{21} monet prawdziwych (z orłem po jednej stronie i reszką po drugiej) oraz jedna moneta fałszywa (z orłami po obu stronach).

Otrzymaliśmy w prezencie monetę przywiezioną z San Escobar i wykonaliśmy nią 20 rzutów — okazało się, że wypadły same orły. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła, gdy rzucimy tą monetą po raz dwudziesty pierwszy?