EGZAMIN MAGISTERSKI, 15.02.2017
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie poniższego zagadnienia programowania liniowego:
Zmaksymalizować $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5$
przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 8 \\ & & 4x_2 & & & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

$$x_i \geq 0.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz $\mathring{e}_{20}, \bar{A}_{20}$ oraz $\bar{a}_{20}$ jeśli wiadomo, że spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji, przyszły czas życia 0-latka jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.1 oraz natężenie oprocentowania równe jest 0.1.

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu oszacowania proporcji osób leworęcznych wśród studentów matematyki przeprowadzono następujący eksperyment. Pytano o leworęczność kolejnych, losowo wybranych studentów aż do momentu znalezienia 10, którzy są leworęczni. Z przepytanych w ten sposób osób, 87 było praworęcznych. Na podstawie tych danych dokonaj estymacji proporcji osób praworęcznych wsród studentów matematyki.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f\colon X \to \mathbb{R}$. Sprawdź, czy funkcja $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli części rzeczywista u i urojona v funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, spełniają warunki $u^2 - 2v = 1$, to f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 15.02.2017
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Na boku $\overline{BC}$ trójkąta ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, że miary kątów $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle ABC$ są równe, a odcinek $\overline{AE}$ jest dwusieczną kąta $\measuredangle DAB$. Udowodnij, że $AC = CE$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Udowodnij, że jeśli n jest nieparzyste to liczba $3^n + 7^n$ jest podzielna przez 5.

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu oszacowania proporcji osób leworęcznych wśród studentów matematyki przeprowadzono następujący eksperyment. Pytano o leworęczność kolejnych, losowo wybranych studentów aż do momentu znalezienia 10, którzy są leworęczni. Z przepytanych w ten sposób osób, 87 było praworęcznych. Na podstawie tych danych dokonaj estymacji proporcji osób praworęcznych wsród studentów matematyki.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f\colon X \to \mathbb{R}$. Sprawdź, czy funkcja $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli części rzeczywista u i urojona v funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, spełniają warunki $u^2 - 2v = 1$, to f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 15.02.2017
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Zakładamy, że są one ograniczone. Rozważmy empiryczną funkcję tworzącą momenty

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{sX_j}.$$

Niech $\hat{\phi}(s) = \mathbb{E} e^{sX_1}$.
1. Do czego zbiega i w jakim sensie Φ_n gdy $n \to \infty$. Podać z jakich twierdzeń się korzysta.
2. Obliczyć wariancję $\sigma^2 = \mathbb{D}^2(e^{sX_1})$.
3. Niech

$$\epsilon_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Do czego zbiega

$$\mathbb{P}\left(|\Phi_n(s) - \hat{\phi}(s)| \leq \epsilon_n\right),$$

gdy $n \to \infty$. Wykorzystać, że jesli Z jest zmienną o rozkładzie standardowym normalnym, to $\mathbb{P}(Z \leq 1) = 0.8413$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

1. Niech $B(t)$ $(t \geq 0)$, będzie standardowym ruchem Browna. Do czego zbiega $\mathbb{P}(B(t) > t^\alpha)$ gdy $t \to \infty$. Podać odpowiedź w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Obliczyć wariancję $aB(1) + b(B(2) - B(1))$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości $f(x, \theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)} 1_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Testujemy $H_0 : \theta = 1$ przeciwko $H_1 : \theta > 1$. Wyznacz test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f\colon X \to \mathbb{R}$. Sprawdź, czy funkcja $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli części rzeczywista u i urojona v funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, spełniają warunki $u^2 - 2v = 1$, to f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 15.02.2017
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozpatrzmy diploidalną populację, która kojarzy się losowo. Przyjmujemy, że w tej populacji dostosowania genotypów **AA**, **Aa** i **aa** są w stosunkach $1 : 1 - s : (1 - s)^2$.

(i) Jak zmienia się częstość allelu **a** w tej populacji w kolejnych pokoleniach?

(ii) Przy jakiej częstości allelu **a** skład genetyczny tej populacji nie ulega zmianie w kolejnych pokoleniach.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozwój pewnej populacji owadów, będących szkodnikami leśnymi oraz ofiarami ptaków leśnych opisany jest równaniem

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta\frac{N^2}{\alpha^2 + N^2}$$

gdzie $N(t)$ oznacza liczebność populacji w chwili t, a r_N, K_N, oraz β, α są dodatnimi stałymi.

(i) Podaj interpretację pojawiających się w tym równaniu wielkości.

(ii) Wyznacz stany stacjonarne.

Zadanie **3. (8 punktów)**

W celu oszacowania proporcji osób leworęcznych wśród studentów matematyki przeprowadzono następujący eksperyment. Pytano o leworęczność kolejnych, losowo wybranych studentów aż do momentu znalezienia 10, którzy są leworęczni. Z przepytanych w ten sposób osób, 87 było praworęcznych. Na podstawie tych danych dokonaj estymacji proporcji osób praworęcznych wsród studentów matematyki.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f\colon X \to \mathbb{R}$. Sprawdź, czy funkcja $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokazać, że jeśli części rzeczywista u i urojona v funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, spełniają warunki $u^2 - 2v = 1$, to f jest stała.