

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
20 września 2016 r.

Zadanie 1. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

albo wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Zadanie 2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$$

na zbiorze

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x^2 + y^2 + 3z^2 = 3z\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągnięte.

Zadanie 3. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t), \\y'(t) &= -x(t).\end{aligned}$$

Zadanie 4. Dana jest taka macierz A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 5×5 oraz takie liczby rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, że

- wektor $(1, 1, 1, 1, 1)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_1 ,
- wektor $(1, 2, 3, 4, 5)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_2 ,
- wektor $(1, 3, 5, 7, 9)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_3 .

Dowieść, że wektor $(43, 53, 63, 73, 83)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $3\lambda_1 + 5\lambda_2 - 7\lambda_3$.

Zadanie 5. Podać przykład niecyklicznej grupy abelowej (przemiennej) rzędu 16, w której istnieje co najmniej jeden element rzędu 8.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 6. Iluzjonista Pan Języczek ma w swoim repertuarze następującą sztuczkę: Do jednej z trzech identycznych papierowych torebek Pan Języczek wkłada deskę z gwoździem, po czym szybko zmienia kolejność torebek. Następnie Pan Języczek, który w tym momencie nie ma bladego pojęcia, gdzie znajduje się gwoździec, z całej siły uderza dłonią gospodyni programu w losowo wybraną torebkę. Jeżeli trafi na torebkę bez gwoźdźca, dostaje oklaski i umawia się na występ w kolejnym programie. Jeśli jednak w wybranej torebce znajduje się deska z gwoździem, gospodyni programu łąduje w szpitalu, a Pan Języczek kończy karierę iluzjonisty.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby występów Pana Języczka do czasu zakończenia jego kariery.