1. Podać granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \mathbf{e^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \mathbf{e^{-3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathbf{e}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n+128} = \mathbf{e^8}$

2. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(6p+11)^n$, $\quad (\mathbf{-2, -5/3})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4p+5)^n$, $\quad (\mathbf{-3/2, -1})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p+2)^n$, $\quad (\mathbf{-1, -1/3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2p+1)^n$, $\quad (\mathbf{-1, 0})$

3. Niech f_n będzie funkcją określoną wzorem $f_n(x)=x-x^n$. Dla podanej liczby n podać punkt x_M, w którym funkcja f_n osiąga największą wartość na przedziale $[0,1]$.

a) $n=3$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt{3}}$

b) $n=2$, $\quad x_M=\mathbf{1/2}$

c) $n=5$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[4]{5}}$

d) $n=4$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[3]{4}}$

4. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 3 & 10 & 29 & 66 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{104}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{7}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{25}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & p \end{pmatrix}$, $p = \mathbf{98}$

5. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że z^n jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z = -7+7i$, $n = \mathbf{8}$

b) $z = \sqrt{3}+3i$, $n = \mathbf{6}$

c) $z = \sqrt{3}+i$, $n = \mathbf{12}$

d) $z = -\sqrt{3}+3i$, $n = \mathbf{3}$

6. Niech $P(m,n)$ będzie polem figury $\{(x,y): x\in[0,1]\wedge x^n\leqslant y\leqslant x^m\}$. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(1/8,1/5)=\mathbf{1/18}$

b) $P(5,8)=\mathbf{1/18}$

c) $P(2,3)=\mathbf{1/12}$

d) $P(1/3,1/2)=\mathbf{1/12}$

7. Niech $C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C\left(0,\sqrt{3}\right)=\mathbf{ln2}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

b) $C(-1,1)=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

c) $C\left(1,\sqrt{3}\right)=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

d) $C\left(1/\sqrt{3},\sqrt{3}\right)=\frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie liczby a, b i c, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & c & 25 \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{19}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & 16 & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{6}$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{21}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 9 & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{17}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & a & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{10}$, $c=\mathbf{13}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=6$, $g^{-1}=\mathbf{1}$ **b)** $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{3}$

c) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{4}$ **d)** $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,4,5,6\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=6$, $g^{-1}=\mathbf{6}$ **b)** $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{3}$

c) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{5}$ **d)** $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

11. Rzucamy jednocześnie n monetami. Następnie zbieramy wszystkie monety, w których wypadł orzeł, i rzucamy nimi po raz drugi. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby monet, które teraz są zwrócone orłem do góry. Wówczas

a) $E(17)=\mathbf{4{,}25=17/4}$ **b)** $E(10)=\mathbf{2{,}5=5/2}$

c) $E(12)=\mathbf{3}$ **d)** $E(16)=\mathbf{4}$

12. Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. W drugiej urnie jest b kul białych i c czarnych. Dla podanej liczby b podać taką liczbę c, aby przy losowaniu kuli z losowo wybranej urny prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe $1/3$.

a) $b=2$, $c=\mathbf{10}$ **b)** $b=5$, $c=\mathbf{25}$

c) $b=10$, $c=\mathbf{50}$ **d)** $b=1$, $c=\mathbf{5}$

1. Podać granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\mathbf{\sqrt{e}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}=\mathbf{e^{-3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\mathbf{e^{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n+128}=\mathbf{e^{8}}$

2. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2p+1)^{n}$, $\quad (\mathbf{-1,\,0})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p+2)^{n}$, $\quad (\mathbf{-1,\,-1/3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(6p+11)^{n}$, $\quad (\mathbf{-2,\,-5/3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4p+5)^{n}$, $\quad (\mathbf{-3/2,\,-1})$

3. Niech f_n będzie funkcją określoną wzorem $f_n(x)=x-x^n$. Dla podanej liczby n podać punkt x_M, w którym funkcja f_n osiąga największą wartość na przedziale $[0,1]$.

a) $n=5,\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[4]{5}}$

b) $n=3,\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt{3}}$

c) $n=2,\quad x_M=\mathbf{1/2}$

d) $n=4,\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[3]{4}}$

4. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 3 & 10 & 29 & 66 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{104}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{98}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{25}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{7}$

5. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że z^n jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=-\sqrt{3}+3i, \quad n=\mathbf{3}$

b) $z=\sqrt{3}+3i, \quad n=\mathbf{6}$

c) $z=\sqrt{3}+i, \quad n=\mathbf{12}$

d) $z=-7+7i, \quad n=\mathbf{8}$

6. Niech $P(m,n)$ będzie polem figury $\{(x,y): x\in[0,1]\wedge x^n\leqslant y\leqslant x^m\}$. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5,8)=\mathbf{1/18}$

b) $P(1/3,1/2)=\mathbf{1/12}$

c) $P(1/8,1/5)=\mathbf{1/18}$

d) $P(2,3)=\mathbf{1/12}$

7. Niech $C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C\left(0,\sqrt{3}\right)=\mathbf{\ln 2}+\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

b) $C(-1,1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

c) $C\left(1/\sqrt{3},\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\ln 3}{2}}+\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

d) $C\left(1,\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\ln 2}{2}}+\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie liczby a, b i c, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & a & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{10}$, $c=\mathbf{13}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & 16 & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{6}$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{21}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 9 & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{17}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & c & 25 \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{19}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{3}$ **b)** $g=5, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$

c) $g=3, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$ **d)** $g=6, \quad g^{-1}=\mathbf{1}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$ **b)** $g=6, \quad g^{-1}=\mathbf{6}$

c) $g=5, \quad g^{-1}=\mathbf{3}$ **d)** $g=3, \quad g^{-1}=\mathbf{5}$

11. Rzucamy jednocześnie n monetami. Następnie zbieramy wszystkie monety, w których wypadł orzeł, i rzucamy nimi po raz drugi. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby monet, które teraz są zwrócone orłem do góry. Wówczas

a) $E(16)=\mathbf{4}$ **b)** $E(17)=\mathbf{4{,}25=17/4}$

c) $E(12)=\mathbf{3}$ **d)** $E(10)=\mathbf{2{,}5=5/2}$

12. Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. W drugiej urnie jest b kul białych i c czarnych. Dla podanej liczby b podać taką liczbę c, aby przy losowaniu kuli z losowo wybranej urny prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe $1/3$.

a) $b=2, \quad c=\mathbf{10}$ **b)** $b=5, \quad c=\mathbf{25}$

c) $b=1, \quad c=\mathbf{5}$ **d)** $b=10, \quad c=\mathbf{50}$

1. Podać granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\mathbf{\sqrt{e}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\mathbf{e^{2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n+128}=\mathbf{e^{8}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}=\mathbf{e^{-3}}$

2. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(6p+11)^{n}$, $\quad(\mathbf{-2,\,-5/3})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p+2)^{n}$, $\quad(\mathbf{-1,\,-1/3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2p+1)^{n}$, $\quad(\mathbf{-1,\,0})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4p+5)^{n}$, $\quad(\mathbf{-3/2,\,-1})$

3. Niech f_n będzie funkcją określoną wzorem $f_n(x)=x-x^n$. Dla podanej liczby n podać punkt x_M, w którym funkcja f_n osiąga największą wartość na przedziale $[0,1]$.

a) $n=2$, $\quad x_M=\mathbf{1/2}$

b) $n=3$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt{3}}$

c) $n=5$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[4]{5}}$

d) $n=4$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[3]{4}}$

4. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 3 & 10 & 29 & 66 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{104}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{25}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{98}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & p \end{pmatrix}, \quad p=\mathbf{7}$

5. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że z^n jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=\sqrt{3}+i, \quad n=\mathbf{12}$

b) $z=-7+7i, \quad n=\mathbf{8}$

c) $z=-\sqrt{3}+3i, \quad n=\mathbf{3}$

d) $z=\sqrt{3}+3i, \quad n=\mathbf{6}$

6. Niech $P(m,n)$ będzie polem figury $\{(x,y): x\in[0,1] \wedge x^n \leqslant y \leqslant x^m\}$. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5,8)=\mathbf{1/18}$

b) $P(1/3,1/2)=\mathbf{1/12}$

c) $P(1/8,1/5)=\mathbf{1/18}$

d) $P(2,3)=\mathbf{1/12}$

7. Niech $C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C(-1,1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

b) $C\left(1/\sqrt{3},\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi}{6}}$

c) $C\left(0,\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\ln 2+\frac{\pi}{3}}$

d) $C\left(1,\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{12}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie liczby a, b i c, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & c & 25 \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{19}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & 16 & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{6}$, $b=\mathbf{11}$, $c=\mathbf{21}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 9 & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{5}$, $b=\mathbf{13}$, $c=\mathbf{17}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & a & b & c \end{pmatrix}$, $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{10}$, $c=\mathbf{13}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{3}$

b) $g=6$, $g^{-1}=\mathbf{1}$

c) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{4}$

d) $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=3$, $g^{-1}=\mathbf{5}$

b) $g=6$, $g^{-1}=\mathbf{6}$

c) $g=5$, $g^{-1}=\mathbf{3}$

d) $g=4$, $g^{-1}=\mathbf{2}$

11. Rzucamy jednocześnie n monetami. Następnie zbieramy wszystkie monety, w których wypadł orzeł, i rzucamy nimi po raz drugi. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby monet, które teraz są zwrócone orłem do góry. Wówczas

a) $E(17)=\mathbf{4{,}25=17/4}$

b) $E(12)=\mathbf{3}$

c) $E(10)=\mathbf{2{,}5=5/2}$

d) $E(16)=\mathbf{4}$

12. Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. W drugiej urnie jest b kul białych i c czarnych. Dla podanej liczby b podać taką liczbę c, aby przy losowaniu kuli z losowo wybranej urny prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe 1/3.

a) $b=5$, $c=\mathbf{25}$

b) $b=10$, $c=\mathbf{50}$

c) $b=1$, $c=\mathbf{5}$

d) $b=2$, $c=\mathbf{10}$

1. Podać granice ciągów.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = \mathbf{e^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n+128} = \mathbf{e^8}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n} = \mathbf{e^{-3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \sqrt{\mathbf{e}}$

2. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(6p+11)^n$, $\quad(\mathbf{-2, -5/3})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2p+1)^n$, $\quad(\mathbf{-1, 0})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4p+5)^n$, $\quad(\mathbf{-3/2, -1})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3p+2)^n$, $\quad(\mathbf{-1, -1/3})$

3. Niech f_n będzie funkcją określoną wzorem $f_n(x)=x-x^n$. Dla podanej liczby n podać punkt x_M, w którym funkcja f_n osiąga największą wartość na przedziale $[0,1]$.

a) $n=5$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[4]{5}}$

b) $n=3$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt{3}}$

c) $n=4$, $\quad x_M=\mathbf{1/\sqrt[3]{4}}$

d) $n=2$, $\quad x_M=\mathbf{1/2}$

4. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 3 & 10 & 29 & 66 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{104}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{98}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{7}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 20 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 100 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & p \end{pmatrix}$, $\quad p = \mathbf{25}$

5. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że z^n jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z = \sqrt{3} + i, \quad n = \mathbf{12}$

b) $z = -7 + 7i, \quad n = \mathbf{8}$

c) $z = \sqrt{3} + 3i, \quad n = \mathbf{6}$

d) $z = -\sqrt{3} + 3i, \quad n = \mathbf{3}$

6. Niech $P(m,n)$ będzie polem figury $\{(x,y): x\in[0,1]\wedge x^n \leqslant y \leqslant x^m\}$. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(5,8) = \mathbf{1/18}$ **b)** $P(1/3,1/2) = \mathbf{1/12}$

c) $P(1/8,1/5) = \mathbf{1/18}$ **d)** $P(2,3) = \mathbf{1/12}$

7. Niech $C(a,b) = \int\limits_a^b \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C\left(1,\sqrt{3}\right) = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

b) $C(-1,1) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

c) $C\left(1/\sqrt{3},\sqrt{3}\right) = \frac{\mathbf{ln3}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$

d) $C\left(0,\sqrt{3}\right) = \mathbf{ln2} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

8. Dla podanej macierzy wskazać takie liczby a, b i c, aby rząd macierzy był równy 2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & c & 25 \end{pmatrix}$, $a = \mathbf{7}$, $b = \mathbf{13}$, $c = \mathbf{19}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & b & 16 & c \end{pmatrix}$, $a = \mathbf{6}$, $b = \mathbf{11}$, $c = \mathbf{21}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 9 & b & c \end{pmatrix}$, $a = \mathbf{5}$, $b = \mathbf{13}$, $c = \mathbf{17}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & a & b & c \end{pmatrix}$, $a = \mathbf{7}$, $b = \mathbf{10}$, $c = \mathbf{13}$

9. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest dodawanie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=6, \quad g^{-1}=\mathbf{1}$ **b)** $g=3, \quad g^{-1}=\mathbf{4}$

c) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{3}$ **d)** $g=5, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 7. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=4, \quad g^{-1}=\mathbf{2}$ **b)** $g=3, \quad g^{-1}=\mathbf{5}$

c) $g=6, \quad g^{-1}=\mathbf{6}$ **d)** $g=5, \quad g^{-1}=\mathbf{3}$

11. Rzucamy jednocześnie n monetami. Następnie zbieramy wszystkie monety, w których wypadł orzeł, i rzucamy nimi po raz drugi. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby monet, które teraz są zwrócone orłem do góry. Wówczas

a) $E(17)=\mathbf{4{,}25=17/4}$ **b)** $E(16)=\mathbf{4}$

c) $E(10)=\mathbf{2{,}5=5/2}$ **d)** $E(12)=\mathbf{3}$

12. Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. W drugiej urnie jest b kul białych i c czarnych. Dla podanej liczby b podać taką liczbę c, aby przy losowaniu kuli z losowo wybranej urny prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było równe $1/3$.

a) $b=10, \quad c=\mathbf{50}$ **b)** $b=5, \quad c=\mathbf{25}$

c) $b=2, \quad c=\mathbf{10}$ **d)** $b=1, \quad c=\mathbf{5}$