EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2016
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie 1. (8 punktów)

Dwie z decyzji A, B, C w grze przeciw Naturze o poniższej macierzy wypłat są optymalne według kryterium Laplace'a i Savage'a.
Wyznacz te decyzje oraz wartość "współczynnika optymizmu" p, przy której są one optymalne także według kryterium Hurwicza.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A	3	4	1	-1	1
B	2	0	2	0	0
C	1	5	2	1	-1

Zadanie 2. (8 punktów)

Rozpatrujemy ciągły model 20-letniego mieszanego ubezpieczenia na życie i dożycie. Składka netto ma być opłacana ze stałą intensywnością $\bar{P} = 500$ przez cały okres trwania umowy. Świadczenie śmiertelne w wysokości $t \cdot S$ jest płatne w chwili śmierci $t \in (0, 20]$ a suma ubezpieczenia w ubezpieczeniu na dożycie wynosi S. Wylicz stałą S wiedząc, że ubezpieczony to osoba 30-letnia, której przyszły czas życia ma stałe natężenie śmiertelności $\mu_{[30]+t} = 0.01$ a natężnie oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$.

Zadanie 3. (8 punktów)

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ będą dwoma niezależnymi próbami losowymi z tego samego rozkładu z wartością oczekiwaną μ, natomiast $\bar{X}$ oraz $\bar{Y}$ ich średnimi próbkowymi. Na podstawie tych średnich tworzymy nowy estymator postaci

$$T = r\bar{X} + (1 - r)\bar{Y},$$

gdzie r jest liczbą z przedziału $[0, 1]$.

1. Wykaż, że T jest nieobciążonym estymatorem dla μ.

2. Wykaż, że T ma najmniejszy błąd średniokwadratowy gdy

$$r = \frac{n}{n+m}$$

.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $C^1[0,1]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$. Sprawdź, czy funkcja d określona dla $f, g \in C^1[0,1]$ wzorem

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)|$$

jest metryką na $C^1[0,1]$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Jakie są możliwe wartości wyrażenia

$$\int_\Gamma \frac{z^2 \cos z + \cos z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

jeżeli Γ jest zamkniętą i prostowalną krzywą gładką, bez samoprzecięć i taką że $\{z \in \mathbb{C} \colon z^4 + z^2 = 0\} \cap \Gamma = \emptyset$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2016
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Ile jest ułamków nieskracalnych postaci $\frac{n}{1000}$, gdzie $1 \leq n < 1000$?

Zadanie **2. (8 punktów)**

W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna ma długość 3, a długość promienia okręgu wpisanego wynosi 1. Obliczyć długości pozostałych boków tego trójkąta.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ będą dwoma niezależnymi próbami losowymi z tego samego rozkładu z wartością oczekiwaną μ, natomiast $\bar{X}$ oraz $\bar{Y}$ ich średnimi próbkowymi. Na podstawie tych średnich tworzymy nowy estymator postaci

$$T = r\bar{X} + (1-r)\bar{Y},$$

gdzie r jest liczbą z przedziału $[0,1]$.

1. Wykaż, że T jest nieobciążonym estymatorem dla μ.

2. Wykaż, że T ma najmniejszy błąd średniokwadratowy gdy
$$r = \frac{n}{n+m}$$
.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $C^1[0,1]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$. Sprawdź, czy funkcja d określona dla $f, g \in C^1[0,1]$ wzorem

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x) - g'(x)|$$

jest metryką na $C^1[0,1]$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Jakie są możliwe wartości wyrażenia

$$\int_\Gamma \frac{z^2 \cos z + \cos z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

jeżeli Γ jest zamkniętą i prostowalną krzywą gładką, bez samoprzecięć i taką że $\{z \in \mathbb{C}\colon z^4 + z^2 = 0\} \cap \Gamma = \emptyset$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2016
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech wektor losowy (X_1, X_2) ma rozkład wielowymiarowy zadany przez: $\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) = 3/8$, $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1/8$ i $Y = -4X_1 + X_2$. Niech teraz $Y_1, \ldots, Y_{100}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim jak Y. Podać przybliżoną wartość

$$\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_{100} \in (100 - 10 \times 3.9, 100 + 10 \times 3.9)).$$

Przyjąć, że $\sqrt{15} \approx 3.9$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $(W(t), t \geq 0)$ będzie standardowym ruchem Browna. Dla jakiego $c \in \mathbb{R}$ proces $(B^2(t) - ct, t \geq 0)$ jest martyngałem, submartyngałem i supermartyngałem. Uzasadnić.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości $f(x) = \exp\{-(x - \theta)\}, x > \theta, \theta \in \mathbb{R}R$.
(i) Wyznacz wartość oczekiwaną $\hat{\theta}_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
(ii) W oparciu o punkt (i) wyznacz nieobciążony estymator $\hat{\theta}_n$.
(iii) Udowodnij, że $\hat{\theta}_n$ jest zgodnym estymatorem parametru θ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $C^1[0,1]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$. Sprawdź, czy funkcja d określona dla $f, g \in C^1[0,1]$ wzorem

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x) - g'(x)|$$

jest metryką na $C^1[0,1]$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Jakie są możliwe wartości wyrażenia

$$\int_\Gamma \frac{z^2 \cos z + \cos z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

jeżeli Γ jest zamkniętą i prostowalną krzywą gładką, bez samoprzecięć i taką że $\{z \in \mathbb{C} \colon z^4 + z^2 = 0\} \cap \Gamma = \emptyset$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 14.09.2016
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Załóżmy, że w diploidalnej populacji kojarzącej się w sposób losowy częstość allelu A jest równa $p \in (0, 1)$, a dostosowania genotypów AA, Aa, i aa są w stosunku $1 : 1 - s : 1 - 2s$. Jeśli częstość mutacji $A \to a$ wynosi μ i brak jest mutacji powrotnej to

(a) jakie będą częstości poszczególnych genotypów w następnym pokoleniu?

(b) jaka będzie częstość allelu A w punkcie równowagi?

Zadanie **2. (8 punktów)**
W modelu Bevertona-Holta liczebność populacji ryb morskich w n-tym roku N_n opisana jest równaniem

$$N_{n+1} = \frac{r}{1 + \frac{r-1}{K} N_n} N_n, \tag{1}$$

gdzie r i K są dodatnimi stałymi.

(a) Znajdź stany stacjonarne.

(b) Podaj warunki na stabilność wyznaczonych stanów stacjonarnych.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ będą dwoma niezależnymi próbami losowymi z tego samego rozkładu z wartością oczekiwaną μ, natomiast $\bar{X}$ oraz $\bar{Y}$ ich średnimi próbkowymi. Na podstawie tych średnich tworzymy nowy estymator postaci

$$T = r\bar{X} + (1 - r)\bar{Y},$$

gdzie r jest liczbą z przedziału $[0, 1]$.

1. Wykaż, że T jest nieobciążonym estymatorem dla μ.

2. Wykaż, że T ma najmniejszy błąd średniokwadratowy gdy
$$r = \frac{n}{n+m}$$
.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $C^1[0,1]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$. Sprawdź, czy funkcja d określona dla $f, g \in C^1[0,1]$ wzorem
$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)|$$
jest metryką na $C^1[0,1]$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Jakie są możliwe wartości wyrażenia
$$\int_\Gamma \frac{z^2\cos z + \cos z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$
jeżeli Γ jest zamkniętą i prostowalną krzywą gładką, bez samoprzecięć i taką że $\{z \in \mathbb{C} \colon z^4 + z^2 = 0\} \cap \Gamma = \emptyset$?

Tabela 1: Tablice dystrybuanty standardowego rozk. normalnego $\Phi(u)$.

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7290	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8078	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8340	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9779	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986