EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
20 czerwca 2016 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n} .$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

na zbiorze

$$\{(x,y,z) : x,y,z \in (0,+\infty) \wedge x+y+z = 7 \wedge xyz = 9\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać równanie

$$x''(t) + 4x(t) = 4t$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 3 .$$

Zadanie **4.** **a) (5 punktów)** Dowieść, że nie istnieje taka macierz kwadratowa A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 5×5, że

$$A^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) (15 punktów) Podać przykład takiej macierzy kwadratowej A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 6×6, że

$$A^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **5.** Podać przykład skończonej grupy abelowej (przemiennej) oraz takich jej **różnych** elementów a, b rzędu 3, że $ab \neq e$.

Zadanie **6.** Graczowi mającemu na koncie S złotych zaoferowano następującą grę:

Gra składa się z pojedynczej rozgrywki polegającej na rzucie kostką. W przypadku wyrzucenia co najmniej dwóch oczek, gracz wygrywa tyle złotych, ile wynosi liczba wyrzuconych oczek. Natomiast w przypadku wyrzucenia jedynki, gracz traci połowę stanu swojego konta.

Rozstrzygnąć, w zależności od stanu konta S, czy graczowi opłaca się (biorąc za miernik opłacalności wartość oczekiwaną wygranej/straty) wziąć udział w grze.