EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2016
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dana jest następująca macierz wypłat gry o sumie zero:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podaj rozwiązanie tej gry.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Kredyt ma być spłacany na początku roku w trzech równych ratach w wysokości $P = 10000$ zł. W celu zabezpieczenia kredytu zawierane jest ubezpieczenie na wypadek śmierci kredytobiorcy (60-latka). Świadczenie śmiertelne równe sumie pozostałych do spłaty rat jest wypłacane na koniec roku śmierci kredytobiorcy. Wyznacz jaki procent raty P stanowi stała składka tego ubezpieczenia. Do obliczeń przyjmij, że zachodzi hipoteza HA oraz $v = 0.9$, $l_{60} = 1000$, $l_{61} = 900$, $l_{62} = 500$.

Zadania **3, 4, 5.**
Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2016
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozważ funkcję `foo` napisaną w c++:

```
struct A {virtual ~A(void) = 0;};
A::~A(void) {}

struct B : public A {};
struct C : public A {};

auto foo(char t) -> A*
  {
  A* w=nullptr;
  switch(t)
    {
    case 'b' : w = new B; break;
    case 'c' : w = new C; break;
    }
  return w;
  }
```

Jak nazywa się wzorzec projektowy realizowany przez funkcję `foo`? Czy ta funkcja w poprawny sposób zarządza zasobami? Jeżeli nie, opisz i uzasadnij scenariusz, który może prowadzić do niewłaściwego zachowania się programu korzystającego z tej funkcji. W jaki sposób można poradzić sobie z tym problemem w c++? Napisz funkcję w poprawionej wersji. Wytłumacz w jaki sposób Twój kod lub wewnętrzna budowa użytych typów czy usług bibliotecznych sprzyja poprawnemu zarządzaniu zasobami.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Co to jest i do czego służy metoda znana jako rozkład *LU*? Opisz jej działanie. Przedstaw jej największe zalety w porównaniu do innych metod rozwiązywania tego samego zagadnienia.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2016
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^6 - n^2$ jest podzielna przez 60.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Obliczyć pole czworokąta wypukłego, którego przekątne przecinają się pod kątem 30° i mają długości 7 i 12.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Generujemy liczbę losową x z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0,\theta]$. Chcąc przetestować hipotezę zerową $H_0 : \theta = 2$ przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1 : \theta \neq 2$ odrzucamy hipotezę H_0 i przyjmujemy H_1, gdy $x \leqslant 0{,}1$ lub $x \geqslant 1{,}9$.

(i) Oblicz prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju.

(ii) Oblicz prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju w przypadku gdy prawdziwa wartośc parametru θ jest równa 2,5.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Oblicz całkę $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$, jeśli $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość n na przedziałach długości $\frac{1}{3^n}$ usuwanych przy konstrukcji zbioru Cantora, zaś w punktach zbioru Cantora przyjmuje wartość e^{x^2}.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znajdź wszystkie funkcje $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, że zarówno $f(z)$ jak i $e^{\overline{f(z)}}$ są holomorficzne dla $z \in \mathbb{C}$ z płaszczyzny zespolonej.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2016
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Opisz wszystkie grupy rzędu 46. Podaj uzasadnienie, że innych nie ma i być nie może.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Zbiór macierzy $U(n) = \{U \in M_{n\times n}(\mathbf{C}) : U^*U = I\}$ jest podrozmaitością rzeczywistej przestrzeni liniowej $M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Przestrzeń styczną do tej podrozmaitości można w naturalny sposób utożsamiać z liniową podprzestrzenią przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Uzasadnij, że przy takim utożsamieniu przestrzenią $T_I U(n)$ jest $\{A \in M_{n\times n}(\mathbf{C}) : A^* + A = 0\}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Na przestrzeni
$$l^2(\mathbb{Z}) := \{g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \|g\|_{l^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |g(m)|^2 < \infty\}$$
definiujemy operator P wzorem
$$(Pf)(m) = \frac{1}{2}(f(m-1) + f(m+1))$$
dla liczb całkowitych $m \in \mathbb{Z}$ i funkcji $f \in l^2(\mathbb{Z})$. Oblicz spektrum tego opertora.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Oblicz całkę $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$, jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość n na przedziałach długości $\frac{1}{3^n}$ usuwanych przy konstrukcji zbioru Cantora, zaś w punktach zbioru Cantora przyjmuje wartość e^{x^2}.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, że zarówno $f(z)$ jak i $e^{\overline{f(z)}}$ są holomorficzne dla $z \in \mathbb{C}$ z płaszczyzny zespolonej.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2016
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech wektor losowy (X_1, X_2) ma rozkład wielowymiarowy normalny $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$, gdzie

$$\mathbf{m} = (2,4), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i $Y = X_1 + X_2$. Niech teraz $Y_1, \ldots, Y_{100}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim jak Y. Znaleźć M takie, że

$$\mathbb{P}(Y_1 + \ldots + Y_{100} \in (600 - M, 600 + M)) = 0.9544.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech $(W(t), t \geqslant 0)$ będzie standardowym ruchem Browna. Niech teraz $X(t) = at + \sigma W(t)$. Jaki rozkład ma

$$\int_0^\infty e^{-rt} dX(t).$$

Podać parametry rozkładu i uzasadnić odpowiedź.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą z rozkładu zero-jedynkowego $b(1,p)$, $p \in (0,1)$. Wyznaczyć estymator bayesowski parametru p ze względu na rozkład *a priori* jednostajny $U(0,1)$, gdy funkcja straty jest postaci $L(p,a) = \dfrac{(p-a)^2}{p(1-p)}$.
Obliczyć jego ryzyko i ryzyko bayesowskie.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Oblicz całkę $\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\lambda$, jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość n na przedziałach długości $\dfrac{1}{3^n}$ usuwanych przy konstrukcji zbioru Cantora, zaś w punktach zbioru Cantora przyjmuje wartość e^{x^2}.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, że zarówno $f(z)$ jak i $e^{\overline{f(z)}}$ są holomorficzne dla $z \in \mathbb{C}$ z płaszczyzny zespolonej.