EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
21 września 2015 r.

Zadanie **1.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|\text{arctg}x - \text{arctg}y| \leqslant |x-y|\,.$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 3x+4y$$

na okręgu

$$\Big\{(x,y):\, x^2+y^2=1\Big\}\,.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać równanie

$$x''+x=2e^t$$

z warunkami początkowymi

$$x(0)=1, \quad x'(0)=1\,.$$

Zadanie **4.** Podać przykład takiej macierzy kwadratowej A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 4×4, że

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **5.** Podać przykład skończonej grupy abelowej (przemiennej) oraz takich jej elementów a, b rzędu 15, że element ab ma rząd 3.
Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **6.** Kasyno w Petersburgu oferuje graczom następującą grę.

Za prawo udziału w pojedynczej rozgrywce gracz płaci R rubli. Następnie krupier wykonuje rzuty symetryczną monetą aż do pojawienia się pierwszego orła, przy formalnym ograniczeniu, że w pojedynczej rozgrywce wykonuje on nie więcej niż milion rzutów. Jeżeli orzeł pojawi się w k-tym rzucie, kasyno wypłaci graczowi 2^{k-1} rubli (czyli 1, 2, 4, 8, … rubli za pojawienie się pierwszego orła odpowiednio w pierwszym, drugim, trzecim, czwartym, … rzucie). Jeżeli jakimś cudem wypadnie milion reszek, gracz nie otrzyma żadnej wypłaty.

a) (18 punktów) Rozstrzygnąć, dla jakiej wartości R gra jest uczciwa w tym sensie, że wartość oczekiwana wygranej netto w pojedynczej rozgrywce jest równa 0. Nie przejmować się absurdalnością otrzymanego wyniku.

b) (2 punkty) Skomentować absurdalny wynik otrzymany w punkcie **a)**.