

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
22 czerwca 2015 r.

Zadanie 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in (1, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$|\ln x - \ln y| \leq |x - y|.$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-1}^1 \int_{|x|\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y + y^3 \, dy \, dx.$$

Zadanie 3. Naczynie w kształcie odwróconego stożka (pionowa oś obrotu, wierzchołek na dole) wypełniono do wysokości 4m wodą. W wierzchołku jest dziura, przez którą wycieka woda. Po jakim czasie z naczynia wycieknie wszystka woda, jeśli zakładamy, że wyrażona w metrach głębokość $h(t)$ wody w naczyniu ewoluje w czasie (wyrażonym w minutach) zgodnie z równaniem

$$5h'(t) = -2(h(t))^{-3/2}?$$

Zadanie 4. Interesują nas takie macierze kwadratowe A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 3×3 , że $A^2 = A$. Rozstrzygnąć, ile jest takich macierzy.

Wskazówka: Wybrać i uzasadnić jedną z odpowiedzi: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 32; 64; 128; 256; 512; skończenie wiele, ale więcej niż 1000; nieskończenie wiele.

Zadanie 5. Podać przykład skończonej grupy abelowej (przemiennej) oraz takich jej elementów a, b odpowiednio rzędów 6 i 10, że element ab ma rząd 30.

Zadanie 6. Zawodnik startuje w teleturnieju, którego scenariusz jest następujący:

Prowadzący pokazuje trzy zamknięte bramki, o których wiadomo, że dwie są puste, a w jednej znajduje się samochód. Zawodnik wybiera jedną z bramek. Następnie prowadzący, który wie, gdzie znajduje się samochód, otwiera pustą bramkę, której nie wybrał zawodnik (w przypadku, gdy obie bramki niewybrane przez zawodnika są puste, prowadzący otwiera losową spośród nich).

Wtedy prowadzący mówi do zawodnika: *Czy chcesz zatrzymać wybraną przez Ciebie bramkę, czy też wolisz ją zamienić na tę z pozostałych bramek, która nie została jeszcze otwarta?*

Zgodnie z zasadami teleturnieju wygraną zawodnika stanowi zawartość bramki, z którą zakończy on rozgrywkę.

Rozstrzygnąć, co powinien zrobić zawodnik, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zakończenia rozgrywki z bramką zawierającą samochód:

- a) koniecznie pozostać przy wcześniej wybranej bramce,
- b) koniecznie dokonać zamiany bramki,
- c) decyzja zawodnika nie ma wpływu na prawdopodobieństwo wygrania samochodu.