

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
18 września 2014 r.

Zadanie 1. Funkcja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-2}^2 \int_{|x|}^{\sqrt{8-x^2}} x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2) dy dx.$$

Zadanie 3. Beczkę w kształcie walca napełniono wodą. W dnie beczki jest dziura, przez którą wycieka woda, przy czym cała woda wycieknie z pełnej beczki po godzinie. Jaka część beczki będzie wypełniona po 30 minutach? Wiadomo, że prędkość wypływu wody jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z głębokości, na jakiej w danym momencie znajduje się dziura, co po oznaczeniu przez $h(t)$ głębokości wody w beczce w chwili t prowadzi do równania $h' = -k\sqrt{h}$ dla pewnej stałej dodatniej k .

Zadanie 4. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, stopnia nie większego od 4, z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez liczby rzeczywiste jako działaniami.

Przekształcenie liniowe F tej przestrzeni jest zdefiniowane wzorem

$$F(W(x)) = (x + 1) \cdot W'(x).$$

Wyznaczyć wszystkie wartości własne przekształcenia F wraz z odpowiadającymi im podprzestrzeniami własnymi (podprzestrzeniami wektorów własnych).

Zadanie 5. Podać przykład skończonej grupy abelowej (przemiennej) oraz takich jej elementów a, b rzędu 12, że element ab ma rząd 4.

Zadanie 6. Trzej gracze (A, B, C) grają w następującą grę. W pojedynczej rozgrywce każdy z graczy obstawia wynik rzutu monetą (orzeł/reszka) i wpłaca do puli 1 zł. Po wykonaniu rzutu monetą cała pula (3zł) jest dzielona (w równych częściach) pomiędzy graczy, którzy poprawnie przewidzieli wynik tego rzutu.

Gracz A zawsze obstawia orła, gracz B zawsze obstawia reszkę, a gracz C obstawia losowo orła lub reszkę (z równymi prawdopodobieństwami $1/2$).

Wyznaczyć wartość oczekiwaną wygranej/przegranej netto (tzn. po uwzględnieniu kwoty wpłaconej do puli) każdego z graczy w pojedynczej rozgrywce.