Rozwiązania zadań testowych

1. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_1=5$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=100$. Podać sumy następujących szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)=\mathbf{195}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\mathbf{-5}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)=\mathbf{-25}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})=\mathbf{-31}$

Rozwiązanie:

Z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}\pm a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\pm\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1\pm\sum_{n=1}^{\infty}a_n=100-5\pm100$$

otrzymujemy odpowiedzi w podpunktach **a)** i **b)**.

Dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ciągłej w zerze i dowolnej liczby całkowitej dodatniej N zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{N}(f(a_{n+1})-f(a_n))=(f(a_2)-f(a_1))+(f(a_3)-f(a_2))+(f(a_4)-f(a_3))+\ldots$$

$$\ldots+(f(a_N)-f(a_{N-1}))+(f(a_{N+1})-f(a_N))=f(a_{N+1})-f(a_1)\to f(0)-f(a_1)=f(0)-f(5)$$

przy $N\to\infty$, gdyż ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ wynika $a_{N+1}\to 0$.

Stąd wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f(a_{n+1})-f(a_n))=f(0)-f(5)\ ,$$

co daje odpowiedzi w podpunktach **b)**, **c)** i **d)**.

2. Dla każdej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającej warunki $f(a)=0$ oraz $f(b)=60$ istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)=c$.
Dla podanych a,b wskazać taką liczbę rzeczywistą c, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $a=1,\quad b=11,\quad c=\mathbf{6}$

b) $a=2,\quad b=8,\quad c=\mathbf{10}$

c) $a=3,\quad b=8,\quad c=\mathbf{12}$

d) $a=4,\quad b=0,\quad c=\mathbf{-15}$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika istnienie takiej liczby $x\in(a,b)$, że

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{60}{b-a}\ .$$

Zatem poprawna odpowiedź to $c=60/(b-a)$. Jest to jedyna poprawna odpowiedź, gdyż funkcja liniowa spełniająca warunki zadania ma stałą pochodną, równą właśnie $60/(b-a)$.

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich takich wartości rzeczywistych parametru p, że dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $W(x,y)\geqslant 0$.

a) $W(x,y)=x^2+pxy+y^2$, $\quad p\in[\mathbf{-2},\,\mathbf{2}]$

b) $W(x,y)=x^2+xy+py^2$, $\quad p\in[\mathbf{1/4},\,+\infty)$

c) $W(x,y)=x^2-xy+py^2$, $\quad p\in[\mathbf{1/4},\,+\infty)$

d) $W(x,y)=px^2+xy+py^2$, $\quad p\in[\mathbf{1/2},\,+\infty)$

Rozwiązanie:

Dla liczb rzeczywistych a, b, c wielomian $W(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ przyjmuje tylko wartości nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy a i c są nieujemne, a ponadto $b^2\leqslant 4ac$.

To prowadzi kolejno do następujących warunków na parametr p:
W **a)** otrzymujemy $p^2\leqslant 4$.
W **b)** i **c)** otrzymujemy $1\leqslant 4p$.
W **d)** otrzymujemy $p\geqslant 0$ oraz $1\leqslant 4p^2$.

4. Niech $C(a,b)=\left[\int\limits_a^b \frac{dx}{\log_3 x}\right]$, gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C(20,26)=\mathbf{2}$

b) $C(50,62)=\mathbf{3}$

c) $C(85,100)=\mathbf{3}$

d) $C(100,120)=\mathbf{4}$

Rozwiązanie:

Jeżeli $3^n<a<b<3^{n+1}$ to dla $x\in[a,b]$ zachodzą nierówności

$$n<\log_3 x<n+1\,,$$

czyli

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\log_3 x}<\frac{1}{n}\,.$$

W konsekwencji

$$\frac{b-a}{n+1}<\int\limits_a^b\frac{dx}{\log_3 x}<\frac{b-a}{n}\,.$$

Poprawne odpowiedzi wynikają z następujących nierówności:

$$2=\frac{6}{3}<\int\limits_{20}^{26}\frac{dx}{\log_3 x}<\frac{6}{2}=3\,, \qquad (n=2)$$

$$3=\frac{12}{4}<\int\limits_{50}^{62}\frac{dx}{\log_3 x}<\frac{12}{3}=4\,, \qquad (n=3)$$

$$3=\frac{15}{5}<\int\limits_{85}^{100}\frac{dx}{\log_3 x}<\frac{15}{4}<\frac{16}{4}=4\,, \qquad (n=4)$$

$$4=\frac{20}{5}<\int\limits_{100}^{120}\frac{dx}{\log_3 x}<\frac{20}{4}=5\,. \qquad (n=4)$$

5. Dla podanych a, b podać taką liczbę c, aby $\int\limits_a^b \frac{2x}{x^2+7} dx = \ln c$.

a) $a=1$, $b=3$, $c=\mathbf{2}$

b) $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{2}$

c) $a=2$, $b=9$, $c=\mathbf{8}$

d) $a=5$, $b=11$, $c=\mathbf{4}$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w liczniku funkcji podcałkowej występuje pochodna mianownika. Możemy więc skorzystać ze wzoru

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

prawdziwego dla dowolnej funkcji różniczkowalnej f.

W konsekwencji

$$\int \frac{2x}{x^2+7} dx = \ln\left(x^2+7\right) + C$$

oraz

$$\int\limits_a^b \frac{2x}{x^2+7} dx = \ln\left(b^2+7\right) - \ln\left(a^2+7\right) = \ln \frac{b^2+7}{a^2+7}\,,$$

skąd poprawna odpowiedź to

$$c = \frac{b^2+7}{a^2+7}\,.$$

6. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę rzeczywistą k, aby zachodziła równość $z^m \cdot \overline{z}^n = z^k$.

a) $m=10$, $n=1$, $k=\mathbf{9}$

b) $m=15$, $n=2$, $k=\mathbf{13}$

c) $m=20$, $n=3$, $k=\mathbf{17}$

d) $m=50$, $n=4$, $k=\mathbf{46}$

Rozwiązanie:

Ponieważ $|z|=1$, zachodzi równość $\overline{z} = z^{-1}$, a w konsekwencji $\overline{z}^n = z^{-n}$. Zatem poprawna odpowiedź to $k = m - n$.

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{7}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & p \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{11}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & p & 5 \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{3}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 21 \\ 1 & p & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, $p=\mathbf{2}$

Rozwiązanie:

Wyznacznik macierzy jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy pewna nietrywialna kombinacja liniowa wierszy lub kolumn jest wektorem zerowym.

W przypadku macierzy rozmiaru 3×3 z podanymi wszystkimi wyrazami dwóch wierszy (lub kolumn) możemy zgadnąć/zauważyć lub wyprowadzić wspólną dla obu tych wierszy (odpowiednio: kolumn) zależność liniową (jednorodną) między ich wyrazami, a następnie zażądać, aby ta sama zależność była spełniona w trzecim wierszu (odpowiednio: kolumnie).

I tak w podpunktach **a)** i **c)** zauważamy, że w każdym z dwóch pierwszych wierszy wyrazy tworzą postęp arytmetyczny (inaczej: środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną skrajnych). Jeżeli ta sama zależność będzie w wierszu trzecim, wyznacznik macierzy będzie równy 0.

W podpunkcie **b)** zauważamy, że w pierwszych dwóch wierszach różnica między wyrazem trzecim i drugim jest dwa razy większa od różnicy między wyrazem drugim i pierwszym. Zastosowanie tej zależności do trzeciego wiersza daje szukaną odpowiedź.

Natomiast w podpunkcie **d)** zauważamy, że w wierszach pierwszym i trzecim spełniony jest warunek: trzeci wyraz jest sumą wyrazu pierwszego i podwojonego wyrazu drugiego. Wystarczy dobrać p tak, aby warunek ten był spełniony także w wierszu drugim.

8. Dla wskazanej wartości parametru p podać zbiór rzeczywistych wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ p & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) $p=0$, $\{\mathbf{1,\ 2,\ 3}\}$

b) $p=1$, $\{\mathbf{0,\ 3}\}$

c) $p=3$, $\{\mathbf{-1,\ 3,\ 4}\}$

d) $p=-1$, $\{\mathbf{3}\}$

Rozwiązanie:

Wartościami własnymi danej w zadaniu macierzy są liczba 3 oraz wartości własne macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & 2 \end{pmatrix}$, które są pierwiastkami jej wielomianu charakterystycznego

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ p & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)-2p = \lambda^2-3\lambda+(2-2p)\,.$$

Suma tych pierwiastków jest równa 3, a ich iloczyn jest równy $2-2p$.

Dla $p=0$ iloczyn pierwiastków jest równy 2, a zatem te pierwiastki to 1 i 2.

Dla $p=1$ iloczyn pierwiastków jest równy 0, a zatem te pierwiastki to 0 i 3.

Dla $p=3$ iloczyn pierwiastków jest równy –4, a zatem te pierwiastki to –1 i 4.

Dla $p=-1$ iloczyn pierwiastków powinien być równy 4, co jest niemożliwe dla pierwiastków rzeczywistych.

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeżeli każy element grupy cyklicznej rzędu n, różny od elementu neutralnego, jest jej generatorem. Dla podanej liczby m podać najmniejszą *dobrą* liczbę $n>m$.

a) $m=7$, $n=\mathbf{11}$

b) $m=14$, $n=\mathbf{17}$

c) $m=21$, $n=\mathbf{23}$

d) $m=28$, $n=\mathbf{29}$

Rozwiązanie:

Liczby *dobre* to liczby pierwsze, a zatem poprawna odpowiedź to najmniejsza liczba pierwsza większa od m.

10. Dla podanej liczby n podać największy rząd elementu grupy permutacji S_n.

a) $n=5$, **6**

b) $n=6$, **6**

c) $n=7$, **12**

d) $n=9$, **20**

Rozwiązanie:

Każda permutacja jest iloczynem cykli rozłącznych, a jej rząd jest najmniejszą wspólną wielokrotnością długości tych cykli.

Najoszczędniejsze konstruowanie permutacji wysokiego rzędu polega na składaniu cykli rozłącznych o parami względnie pierwszych długościach. Pamiętajmy, że suma długości tych cykli nie może przekraczać n.

Ponieważ najkrótsze trzy cykle o długościach parami względnie pierwszych większych od 1 mają długości 2, 3, 5, a we wszystkich pytaniach $n<10=2+3+5$, największy rząd ma permutacja będąca cyklem lub złożeniem dwóch cykli rozłącznych o względnie pierwszych długościach.

Bezpośrednio sprawdzamy, że największe rzędy permutacji są realizowane w następujący sposób (w miarę możliwości staramy się złożyć dwa cykle zbliżonej długości, o sumie długości n):
dla $n=5$ — złożenie cykli długości 2 i 3,
dla $n=6$ — zlożenie cykli długości 2 i 3 lub cykl długości 6,
dla $n=7$ — złożenie cykli długości 3 i 4,
dla $n=9$ — złożenie cykli długości 4 i 5.

11. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną wylosowanej liczby. Wówczas

a) $E(6)=\mathbf{3{,}5}=\mathbf{7/2}$

b) $E(10)=\mathbf{5{,}5}=\mathbf{11/2}$

c) $E(15)=\mathbf{8}$

d) $E(2014)=\mathbf{1007{,}5}=\mathbf{2015/2}$

Rozwiązanie:

Wartość oczekiwana jest równa

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{n\cdot(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}\,.$$

12. W pierwszej urnie jest jedna kula czarna i jedna kula biała, a w drugiej urnie jest jedna kula biała i n kul czarnych. Z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana kula jest biała. Wówczas

a) $P(1)=\mathbf{1/2}$

b) $P(2)=\mathbf{5/12}$

c) $P(3)=\mathbf{3/8}$

d) $P(5)=\mathbf{1/3}$

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo wylosowania pierwszej urny, a następnie wylowowania z niej kuli białej jest równe $1/4$.

Prawdopodobieństwo wylosowania drugiej urny, a następnie wylowowania z niej kuli białej jest równe $\dfrac{1}{2(n+1)}$.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}=\frac{(n+1)+2}{4(n+1)}=\frac{n+3}{4(n+1)}\,.$$

Rozwiązania zadań otwartych

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot x^{2n}}{(2n)!\cdot n^n}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(3n+3)!\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!\cdot(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!\cdot n^n}{(3n)!\cdot x^{2n}}\right|=\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot x^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot 3\cdot x^2}{(2n+1)\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}\to\frac{27}{4e}\cdot x^2$$

przy $n\to\infty$.

Jeżeli $\dfrac{27}{4e}\cdot x^2<1$, czyli $|x|<\dfrac{2\sqrt{e}}{3\sqrt{3}}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\dfrac{27}{4e}\cdot x^2>1$, czyli $|x|>\dfrac{2\sqrt{e}}{3\sqrt{3}}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\dfrac{2\sqrt{e}}{3\sqrt{3}}$.

Odpowiedź

Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\dfrac{2\sqrt{e}}{3\sqrt{3}}$.

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y)=3x+4y+5 \tag{2}$$

na okręgu

$$\left\{(x,y):\, x^2+y^2=1\right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Rozwiązanie:

Sposób I

Funkcję f możemy wyrazić przy pomocy iloczynu skalarnego wektorów, a mianowicie

$$f(x,y)=(3,4)\circ(x,y)+5\,.$$

Jeżeli przez $\alpha_{(x,y)}$ oznaczymy kąt między wektorem (x,y) i wektorem $(3,4)$, to f jest dana wzorem

$$f(x,y)=5+5\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\alpha_{(x,y)}\,.$$

Formalnie wzór ten wymaga zastrzeżenia dotyczącego $x=y=0$, gdzie $\alpha_{(x,y)}$ jest wprawdzie nieokreślone, ale i tak byłoby mnożone przez 0. Faktycznie zastrzeżenie to nie dotyczy rozwiązywanego zadania, gdyż punkt $(0,0)$ nie leży na rozważanym okręgu. Co więcej, na tym okręgu możemy przepisać f w postaci

$$f(x,y)=5+5\cdot\cos\alpha_{(x,y)}\,.$$

Liczba $\cos\alpha_{(x,y)}$ przyjmuje wartości między –1 i 1, przy czym wartość 1 jest osiągana wtedy i tylko wtedy, gdy wektory (x,y) oraz $(3,4)$ mają wspólny kierunek i zwrot, a wartość –1, gdy mają one wspólny kierunek i przeciwne zwroty. W konsekwencji możemy udzielić odpowiedzi na pytanie postawione w zadania.

Odpowiedź

Funkcja f na podanym w treści zadania okręgu osiąga największą wartość równą 10 w punkcie $(3,4)/5=(3/5,4/5)$, a najmniejszą wartość równą 0 w punkcie $-(3,4)/5=(-3/5,-4/5)$.

Sposób II

Skorzystamy ze stardardowej procedury znajdowania ekstremów warunkowych, w wersji *liniowo zależnych gradientów*.

W punktach krytycznych funkcji f określonej wzorem (2) na krzywej zdefiniowanej warunkiem $g(x,y)=0$, gdzie

$$g(x,y)=x^2+y^2-1\,,$$

gradienty funkcji f i g są liniowo zależne. Ponieważ

$$\mathrm{grad}f(x,y)=(3,4)$$

oraz

$$\mathrm{grad}g(x,y)=(2x,2y),$$

liniowa zależność gradientów jest równoważna równaniu

$$\det\begin{pmatrix}3&4\\2x&2y\end{pmatrix}=0\,,$$

co daje po wyliczeniu wyznacznika i wykonaniu uproszczeń

$$3y=4x\,.$$

W konsekwencji punkty krytyczne spełniają układ równań

$$\begin{cases}3y&=&4x\\x^2+y^2&=&1\,.\end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y=4x/3$ i podstawiamy do drugiego równania otrzymując kolejno

$$x^2+\frac{16x^2}{9}=1\,,$$

$$\frac{25x^2}{9}=1\,,$$

$$x^2=\frac{9}{25}\,,$$

$$x=\pm\frac{3}{5}\,,$$

$$y=\pm\frac{4}{5}\,.$$

Bezpośrednio wyliczamy, że

$$f\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=10 \quad \text{oraz} \quad f\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=0\,,$$

skąd wynika odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu sformułowana na końcu pierwszego sposobu rozwiązania.

Zadanie **3.** W zbiorniku znajduje się 1 litr wody.

W pewnym momencie do zbiornika zaczynamy dolewać wodę w tempie odwrotnie proporcjonalnym do ilości (w danej chwili) wody w zbiorniku.

Jaka będzie ilość wody w zbiorniku po dwóch minutach, jeśli wiemy, że po jednej minucie ilość wody w zbiorniku wzrosła do 5 litrów?

Wskazówka: Jeżeli $x(t)$ oznacza ilość wody w zbiorniku w chwili t, to x spełnia równanie różniczkowe $x' = k/x$ dla pewnej stałej k.

Rozwiązanie:

Niech $x(t)$ bedzie ilością (w litrach) wody w zbiorniku w chwili t (w minutach), gdzie $t=0$ odpowiada chwili, w której zaczęto dolewać wodę do zbiornika.

Z warunków zadania wynika, że funkcja x spełnia równanie różniczkowe

$$x' = \frac{k}{x} \tag{3}$$

dla pewnej stałej dodatniej k, która będzie wyznaczona po rozwiązaniu równania i uwzględnieniu, że zgodnie z warunkami zadania

$$x(0)=1 \quad \text{oraz} \quad x(1)=5\,. \tag{4}$$

Rozwiązujemy równanie różniczkowe (3):

$$x'(t)x(t)=k\,,$$

$$\int x'(t)x(t)dt=\int kdt\,,$$

$$\frac{x^2(t)}{2}=kt+C\,,$$

$$x(t)=\sqrt{2kt+2C}\,.$$

Uwzględnienie założeń (4) prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \sqrt{2C} &= 1 \\ \sqrt{2k+2C} &= 5\,, \end{cases}$$

z którego otrzymujemy $C=1/2$ oraz $k=12$. Zatem

$$x(t)=\sqrt{24t+1}\,,$$

co daje

$$x(2)=\sqrt{24\cdot 2+1}=\sqrt{49}=7\,.$$

Odpowiedź

Po dwóch minutach w zbiorniku będzie 7 litrów wody.

Zadanie **4.** Dowieść, że istnieje taka macierz kwadratowa A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 5×5, że

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix},$$

a przy tym A nie jest macierzą diagonalną.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że warunki zadania są spełnione przez każdą macierz postaci

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

gdzie macierz

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

nie jest diagonalna, ale

$$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niech B będzie macierzą obrotu o 120° (przeciwzegarowo) wokół punktu (0,0), czyli

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wówczas B^3 jest macierzą identycznościową.

To pozwala podać przykład macierzy spełniającej warunki zadania:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zadanie **5.** Dana jest taka grupa G i takie jej elementy a, b, że

(i) element a ma rząd 3,

(ii) element b nie jest elementem neutralnym,

(iii) zachodzi równość $ba=ab^2$.

a) Wyznaczyć rząd elementu b.

b) Dowieść, że $(ab)^3=e$.

Rozwiązanie:

Na mocy własności (iii) otrzymujemy

$$b^m\cdot a\cdot b^n=b^{m-1}\cdot ba\cdot b^n=b^{m-1}\cdot ab^2\cdot b^n=b^{m-1}\cdot a\cdot b^{n+2}\,,$$

czyli

$$b^m \cdot a \cdot b^n = b^{m-1} \cdot a \cdot b^{n+2} \tag{5}$$

dla dowolnych liczb całkowitych $m \geqslant 1$ i $n \geqslant 0$.

Wielokrotne zastosowanie wzoru (5) daje dla dowolnej liczby naturalnej k ciąg równości

$$b^k \cdot a = b^{k-1} \cdot a \cdot b^2 = b^{k-2} \cdot a \cdot b^4 = b^{k-3} \cdot a \cdot b^6 = \ldots = b^2 \cdot a \cdot b^{2k-4} = b \cdot a \cdot b^{2k-2} = a \cdot b^{2k} ,$$

czyli

$$b^k \cdot a = a \cdot b^{2k} , \tag{6}$$

a wobec tego otrzymujemy

$$ba^3 = baaa = ab^2aa = aab^4a = aaab^8 = a^3b^8 .$$

Ponieważ $a^3 = e$, równość $ba^3 = a^3b^8$ daje $b = b^8$, skąd $b^7 = e$. Zatem rząd elementu b jest dzielnikiem liczby 7, a skoro b nie jest elementem neutralnym, to rząd ten musi być równy 7.

Odpowiedź na pytanie **a)**
Rząd elementu b jest równy 7.

Przechodząc do części **b)** zauważmy, że korzystając ze wzoru (6) otrzymujemy

$$(ab)^3 = ababab = aab^2bab = aab^3ab = aaab^6b = a^3b^7 = e .$$

Inne rozwiązanie podpunktu **b)**
Z warunku (iii) po prawostronnym wymnożeniu stronami przez b^{-1} otrzymujemy

$$ab = bab^{-1} .$$

Zatem elementy ab i a są sprzężone, mają więc ten sam rząd.

Zadanie **6.** W worku znajdują się 1024 zwykłe monety oraz jedna moneta fałszywa mająca orły po obu stronach. Wyciągnięto z worka jedną monetę, a następnie rzucono nią n razy. Okazało się, że za każdym razem wypadł orzeł.

W zależności od n, co jest bardziej prawdopodobne: To, że wylosowana moneta jest prawdziwa, czy to, że jest fałszywa?

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia monety prawdziwej jest równe 1024/1025, a monety fałszywej 1/1025.

Jeżeli wyciągnięto monetę prawdziwą, to prawdopodobieństwo, że w n rzutach wypadną same orły jest równe $1/2^n$. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia: "**Wylosowano monetę prawdziwą i wypadło n orłów**" jest równe $P = \dfrac{1024}{1025 \cdot 2^n} = \dfrac{2^{10-n}}{1025}$.

Ponieważ w rzutach fałszywą monetą wypadają same orły, prawdopodobieństwo zdarzenia "**Wylosowano monetę fałszywą i wypadło n orłów**" jest równe $F = 1/1025$ niezależnie od liczby n.

W konsekwencji, w opisanej sytuacji prawdopodobieństwo (warunkowe), że wylosowana moneta jest fałszywa, wynosi

$$\frac{F}{P+F} = \frac{1}{1+2^{n-10}} .$$

Odpowiedź
Dla $n < 10$ bardziej prawdopodobne jest, że wylosowana moneta jest prawdziwa, a dla $n > 10$ większe jest prawdopodobieństwo, że jest ona fałszywa. Dla $n = 10$ oba prawdopodobieństwa są równe 1/2.