EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
23 czerwca 2014 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n^n} .$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 3x + 4y + 5$$

na okręgu

$$\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** W zbiorniku znajduje się 1 litr wody.

W pewnym momencie do zbiornika zaczynamy dolewać wodę w tempie odwrotnie proporcjonalnym do ilości (w danej chwili) wody w zbiorniku.

Jaka będzie ilość wody w zbiorniku po dwóch minutach, jeśli wiemy, że po jednej minucie ilość wody w zbiorniku wzrosła do 5 litrów?

Wskazówka: Jeżeli $x(t)$ oznacza ilość wody w zbiorniku w chwili t, to x spełnia równanie różniczkowe $x' = k/x$ dla pewnej stałej k.

Zadanie **4.** Dowieść, że istnieje taka macierz kwadratowa A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 5×5, że

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} ,$$

a przy tym A nie jest macierzą diagonalną.

Zadanie **5.** Dana jest taka grupa G i takie jej elementy a, b, że
(i) element a ma rząd 3,
(ii) element b nie jest elementem neutralnym,
(iii) zachodzi równość $ba = ab^2$.

a) Wyznaczyć rząd elementu b.

b) Dowieść, że $(ab)^3 = e$.

Zadanie **6.** W worku znajdują się 1024 zwykłe monety oraz jedna moneta fałszywa mająca orły po obu stronach. Wyciągnięto z worka jedną monetę, a następnie rzucono nią n razy. Okazało się, że za każdym razem wypadł orzeł.

W zależności od n, co jest bardziej prawdopodobne: To, że wylosowana moneta jest prawdziwa, czy to, że jest fałszywa?