EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2014
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Sprawdź, czy wektor $x^0 = (0,5,2,0,0)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia programowania liniowego:

Zminimalizować $$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5,$$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & \geqslant & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & \geqslant & 10 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & \geqslant & 7 \end{array}$$

$$x_i \geqslant 0.$$

Rozstrzygnij, czy jest to także rozwiązanie optymalne tego zagadnienia.
Wyznacz rozwiązanie optymalne zagadnienia dualnego.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oczekiwane dalsze trwanie życia 40-latka wynosi $e_{40} = E(K_{40}) = 28.5$ roku natomiast $e_{41} = 27.7$ roku.

(a) Znajdź p_{40} przy założeniu, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

(b) Zakładając dodatkowo, że roczna efektywna stopa procentowa wynosi $i = 0.1$, oblicz jednorazową składkę netto czystego ubezpieczenia na dożycie dla 40-latka na okres jednego roku, na sumę ubezpieczenia 100 PLN.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2014
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**

Wykazać, że dla wielomianów Czebyszewa, określonych rekurencją

$$T_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad k=0 \\ x & \text{dla} \quad k=1 \\ 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) & \text{dla} \quad 1<k \end{cases}$$

liczba elementów zbioru $\{x \in [-1,1] : T_k(x) = 0\}$ wynosi k.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech będzie dany następujący program napisany w C++:

```
#include<iostream> #include<vector> #include<cassert>

std::vector<int> Obliczenie(int n)
  {  assert(n>0);   std::vector<int> wynik;   for(int p=1; p<n; ++p)
    { bool k=false;  for(int q=1; q<n; ++q)  k = k || ((p*q-1)%n==0);
    if(!k)   wynik.push_back(p);
    }
  return wynik;
  }
void test_Obliczenie(void)
  {   assert(Obliczenie(3).empty());   std::vector<int> o4=Obliczenie(4);
  assert(o4.size()==1);   assert(o4[0]==2);
  assert(Obliczenie(5).empty());
  std::vector<int> o6=Obliczenie(6);   assert(o6.size()==3);
  assert(o6[0]==2);   assert(o6[1]==3);   assert(o6[2]==4);
  }
int main(void)
  {   test_Obliczenie();   std::cerr << "test_Obliczenie ok\n";   return 0;
  }
```

Polecenia:

1. Wyjaśnij co oblicza funkcja `Obliczenie`.
2. Co otrzymamy, gdy uruchomimy obliczenia z argumentem 7 oraz 8? Dopisz stosowne przypadki do funkcji testującej.
3. Jaki obiekt matematyczny dla $n \in \mathbb{N}$ tworzy zbiór $\{0,1,\ldots,n-1\}$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2014
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Udowodnić, że liczba
$$2^{55}+1$$
dzieli się przez 33.

Zadanie **2. (8 punktów)**
W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 12 a kąty przy podstawie mają miarę 30° każdy. Oblicz promień okręgu wpisanego i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Dla próby losowej $X_1, X_2, ..., X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ rozpatrujemy trzy estymatory wariancji:
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2, \qquad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$
oraz
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2,$$
gdzie $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Który, z tak zdefiniowanych estymatorów wariancji ma najmniejsze, a który największe obciążenie?
2. Oblicz błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{\sigma}^2$ wiedząc, że $E\left(S^2 - \sigma^2\right)^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, czy w przestrzeni $c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ z normą supremum
$$\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$
da się wprowadzić iloczyn skalarny taki, że
$$\langle (a_n),(a_n)\rangle = \|(a_n)\|_\infty^2.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Oblicz całkę Lebesgue'a $\int_{[0,1]} f\,d\lambda$ z funkcji f zdefiniowanej następująco
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Czy funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2014
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Proszę podać (wraz z uzasadnieniem) ile jest klas sprzężoności elementów w grupach:

1. S_6−wszystkich permutacji zbioru 6-elementowego,
2. A_6−permutacji parzystych zbioru 6-elementowego.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Udowodnij, że zbiór macierzy o wyznaczniku 1 jest podrozmaitością przestrzeni $M_{n\times n}(R)$ (przestrzeni liniowej macierzy $n\times n$ o wyrazach rzeczywistych).

Zadanie **3. (8 punktów)**
Uzasadnić, że dla dowolnych $0<x<y$ zachodzi nierówność

$$\log\frac{y}{x}\leqslant\frac{y-x}{\sqrt{xy}}.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, czy w przestrzeni $c_0=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n\in\mathbb{R}, \lim_{n\to\infty}a_n=0\}$ z normą supremum

$$\|(a_n)\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

da się wprowadzić iloczyn skalarny taki, że

$$\langle(a_n),(a_n)\rangle=\|(a_n)\|_\infty^2.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Oblicz całkę Lebesgue'a $\int_{[0,1]}f\,d\lambda$ z funkcji f zdefiniowanej następująco

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\notin\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Czy funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna? Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2014
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-1,1)$.

a. Napisać funkcję charakterystyczną zmiennej X_1.

b. Znaleźć funkcję charakterystyczną $\phi_n(t)$ zmiennej $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

c. Podać przykłąd takiego ciągu b_n, że
$$\phi_n\left(\frac{t}{b_n}\right) \to e^{-t^2/2}$$
dla wszystkich t.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech $N(t)$ będzie jednorodnym procesem Poissona ze stałą intensywności λ. Udowodnij, że
$$X(t) = \exp\{N(t) - at\}$$
jest podmartyngałem dla $a \leqslant \lambda(e-1)$ oraz nadmartyngałem dla $a \geqslant \lambda(e-1)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu zero-jedynkowego o gęstości
$$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x = 0,1; \theta \in (0,1).$$
Wyznacz statystykę dostateczną dla parametru θ. Czy statystyka ta jest minimalną statystyką dostateczną? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, czy w przestrzeni $c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ z normą supremum
$$\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$
da się wprowadzić iloczyn skalarny taki, że
$$\langle (a_n), (a_n) \rangle = \|(a_n)\|_\infty^2.$$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Oblicz całkę Lebesgue'a $\int_{[0,1]} f d\lambda$ z funkcji f zdefiniowanej następująco
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Czy funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna? Odpowiedź uzasadnij.