Wersja testu **A** 20 września 2013 r.

1. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: *Suma cyfr liczby n jest parzysta.* Czy implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ jest prawdziwa dla

a) $n=77$;

b) $n=79$;

c) $n=89$;

d) $n=99$?

2. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z, t większych od 1, równość $\log_x y = \log_z t$ jest równoważna równości

a) $\log_t y = \log_z x$;

b) $\log_x z = \log_y t$;

c) $\log_x z = \log_t y$;

d) $\log_x t = \log_z y$?

3. Interesują nas wszystkie takie pary liczb rzeczywistych $a<b$, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<a \\ (x^3-x)\cdot(x^2-4) & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 0 & \text{dla} \quad x\geqslant b \end{cases}$$

jest ciągła. Czy liczba takich par (a,b) jest

a) podzielna przez 3 ;

b) parzysta ;

c) większa od 7 ;

d) podzielna przez 5 ?

4. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny. Czy stąd wynika, że zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}\right)$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_n^2\right)$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^3 - a_n^3\right)$?

5. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny. Czy stąd wynika, że **rozbieżny** jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 1\right)$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 4\right)$?

6. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Czy f jest różniczkowalna, jeżeli

a) $a = 1, \quad b = 1$;

b) $a = 1, \quad b = 0$;

c) $a = 2, \quad b = 0$;

d) $a = 2, \quad b = -1$?

7. Czy całka niewłaściwa $\int\limits_{2013}^{\infty} x^p\,dx$ jest zbieżna dla

a) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{35}+6\right)$;

b) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{37}+6\right)$;

c) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{41}+6\right)$;

d) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{39}+6\right)$?

8. Czy całka niewłaściwa $\int\limits_{0}^{2013} x^p\,dx$ jest zbieżna dla

a) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{41}+6\right)$;

b) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{39}+6\right)$;

c) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{37}+6\right)$;

d) $p=\log_{\left(\sqrt{37}-6\right)}\left(\sqrt{35}+6\right)$?

9. Funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad x=y=0 \end{cases}$$

Czy wtedy

a) $f''_{xy}(-1,1)=f''_{yx}(-1,1)$;

b) $f''_{xy}(1,1)=f''_{yx}(1,1)$;

c) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$;

d) $f''_{xy}(0,1)=f''_{yx}(0,1)$?

10. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

a) $z = -\sqrt{3} + i$;

b) $z = \sqrt{3} + i$;

c) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

d) $z = -1 + i\sqrt{3}$?

11. Czy nierówność $(z-1)^4 < (z-i)^4$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a) $z = 22 + 24i$;

b) $z = 7 + 24i$;

c) $z = 12 + 12i$;

d) $z = 17 + 12i$?

12. Czy w grupie permutacji S_{12} zbioru 12-elementowego istnieje element rzędu

a) 27;

b) 30;

c) 42;

d) 25?

13. Czy istnieje grupa abelowa oraz takie jej elementy a i b odpowiednio rzędów 6 i 15, że element ab ma rząd

a) 15;

b) 90;

c) 10;

d) 30?

14. Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ z mnożeniem modulo n jest grupą, jeżeli

a) 27 ;

b) 21 ;

c) 25 ;

d) 23 ?

15. Dany jest taki układ równań liniowych z sześcioma niewiadomymi, że wektory (2,2,0,0,0,0), (0,0,0,0,2,2) oraz (2,2,1,1,0,0) są rozwiązaniami tego układu. Czy stąd wynika, że podany wektor jest rozwiązaniem danego układu równań

a) (1,1,0,0,1,1) ;

b) (1,1,2,2,1,1) ;

c) (1,1,1,1,1,1) ;

d) (1,1,1,1,0,0) ?

16. Dany jest taki układ równań liniowych z sześcioma niewiadomymi, że wektory (2,2,0,0,0,0) oraz (0,0,0,0,2,2) są rozwiązaniami tego układu, a wektor (2,2,1,1,0,0) **nie** jest rozwiązaniem tego układu. Czy stąd wynika, że podany wektor **nie** jest rozwiązaniem danego układu równań

a) (1,1,2,2,1,1) ;

b) (1,1,1,1,1,1) ;

c) (1,1,0,0,1,1) ;

d) (1,1,1,1,0,0) ?

17. Czy istnieje taka macierz kwadratowa o wyznaczniku 3, że po pomnożeniu wszystkich wyrazów tej macierzy przez 2 otrzymamy macierz o wyznaczniku

a) 16 ;

b) 27 ;

c) 36 ;

d) 24 ?

18. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy jedną kulę. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że liczba napisana na wylosowanej kuli jest podzielna przez 5. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że

a) $P(n)=1/7$;

b) $P(n)=1/5$;

c) $P(n)=1/10$;

d) $P(n)=1/4$?

19. W urnie znajduje się n kul z kolejnymi liczbami od 1 do n. Losujemy jedną kulę, a następnie rzucamy monetą tyle razy, ile wskazuje liczba na wylosowanej kuli. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby wyrzuconych orłów. Czy wtedy

a) $E(20)=5$;

b) $E(15)=4$;

c) $E(10)=5$;

d) $E(5)=3$?

20. W worku znajduje się 1000 monet, w tym 999 monet zwyczajnych oraz jedna moneta z orłami po obu stronach. Wyciągnięto z worka monetę i rzucono nią pięciokrotnie. Wypadło pięć orłów. Niech p będzie prawdopodobieństwem (warunkowym), że wobec tego wylosowana moneta ma orły po obu stronach. Czy wtedy

a) $p<\frac{1}{8}$;

b) $\frac{1}{32}<p<\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{2}<p<\frac{31}{32}$;

d) $\frac{7}{8}<p$?