

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
20 września 2013 r.

Zadanie 1. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 15 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 25.$$

Zadanie 2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e}{x - 1} & \text{dla } x \neq 1 \\ A & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Dla której wartości parametru A funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 1 i jaka jest wówczas wartość $f'(1)$?

Zadanie 3.

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y, \\ y' &= y, \\ x(0) &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Zadanie 4. Dana jest taka macierz kwadratowa A (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 5×5 , że

- wektor $(0, 1, 2, 3, 4)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_1 ,
- wektor $(4, 3, 2, 1, 0)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_2 ,
- wektor $(3, 5, 7, 9, 11)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_3 .

Dowieść, że $\lambda_3 = 7\lambda_2 - 6\lambda_1$.

Zadanie 5. Dana jest grupa nieabelowa oraz takie jej elementy a, b , że element a ma rząd 4, rząd elementu b jest liczbą nieparzystą większą od 1, a ponadto $ba = ab^3$. Wyznaczyć rząd elementu b .

Wskazówka: $b = ba^4 = \dots$

Zadanie 6. Dane są takie zdarzenia losowe A, B i C , że

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{5}{6} \quad \text{oraz} \quad P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{2}{3}.$$

Wyznaczyć $P(A \cap B \cap C)$.

Zadania 5, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.