Wersja testu **A** 20 czerwca 2013 r.

1. Przypominam, że potęgowanie wykonujemy **od góry:** $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.
Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{16^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$,
$D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Czy wtedy

a) $E(10) = 43/21$;

b) $E(20) = 2$;

c) $E(30) = 2$;

d) $E(40) = 161/81$?

2. Niech $A(n) = 4^{4^n}$, $B(n) = 256^{64^n}$, $C(n) = \log_2 A(n)$,
$D(n) = \log_2 B(n)$, $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$. Czy wtedy

a) $E(40) = 242/81$;

b) $E(30) = 3$;

c) $E(20) = 3$;

d) $E(10) = 64/21$?

3. Czy implikacja $|x-5| < 3 \Rightarrow |x-10| < 6$ jest prawdziwa dla

a) $x = 3$;

b) $x = 1$;

c) $x = 15$;

d) $x = 7$?

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a ponadto dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$3 < f'(x) < 4 .$$

Czy stąd wynika, że

a) $f(9) \neq f(5) + 9$;

b) $f(6) \neq f(5) + 6$;

c) $f(7) \neq f(5) + 7$;

d) $f(8) \neq f(5) + 8$?

5. Czy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p+n^q}$, gdzie

a) $p=\log_5 3, \quad q=\log_7 3$;

b) $p=\log_5 11, \quad q=\log_7 3$;

c) $p=\log_5 3, \quad q=\log_7 11$;

d) $p=\log_5 11, \quad q=\log_7 11$?

6. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x} < \int_7^9 \frac{dx}{x}$;

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x} < \int_5^7 \frac{dx}{x}$;

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} < \int_3^7 \frac{dx}{x}$;

d) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x} < \int_3^7 \frac{dx}{x}$?

7. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\displaystyle\int_{10}^{20} 2^{\sin x}\, dx < 20$;

b) $\displaystyle\int_{20}^{25} 2^{\sin x}\, dx < 10$;

c) $\displaystyle\int_{90}^{100} 2^{\sin x}\, dx < 20$;

d) $\displaystyle\int_{50}^{90} 2^{\sin x}\, dx < 20$?

8. Czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\binom{3n}{n}}$ jest zbieżny, jeżeli

a) $a=7$;
b) $a=6$;
c) $a=3$;
d) $a=2$?

9. Czy poprawnie dokonano zmiany kolejności całkowania

a) $\int\limits_{-3}^{4}\int\limits_{x^2}^{x+12} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{16}\int\limits_{y-12}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$;

b) $\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{1}^{4}\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$;

c) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$;

d) $\int\limits_{-2}^{3}\int\limits_{x^2}^{x+6} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{4}^{9}\int\limits_{y-6}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$?

10. Niech $R(m,n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z, że

$$(z^m-1)\cdot(z^n-1)=0\,.$$

Czy wtedy

a) $R(3,6)=8$;
b) $R(4,6)=8$;
c) $R(2,3)=5$;
d) $R(3,4)=6$?

11. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z, że

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$$

a) $z_1=1+i, \quad z_2=2+2i, \quad z_3=7+11i\,;$

b) $z_1=1+i, \quad z_2=2+2i, \quad z_3=13+4i\,;$

c) $z_1=1+i, \quad z_2=2+2i, \quad z_3=8+8i\,;$

d) $z_1=1+i, \quad z_2=2+2i, \quad z_3=5+9i\,?$

12. Element g grupy G spełnia warunek $g^{30}=e$. Czy stąd wynika, że rząd elementu g w grupie G jest podzielny przez

a) 10 ;

b) 30 ;

c) 60 ;

d) 6 ?

13. Czy w dowolnej grupie cyklicznej rzędu 30 istnieje element rzędu

a) 20 ;

b) 60 ;

c) 15 ;

d) 30 ?

14. Czy w grupie permutacji S_{11} zbioru 11-elementowego istnieje element rzędu

a) 28 ;

b) 9 ;

c) 22 ;

d) 21 ?

15. Czy wektor $(1,1,1,1)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ jest prostopadły do wektora

a) $(1,2,3,4)$;

b) $(1,4,9,-16)$;

c) $(1,-2,-3,4)$;

d) $(1,3,6,-10)$?

16. Dany jest układ trzech równań liniowych z pięcioma niewiadomymi. Wiadomo, że $(1,1,1,0,0)$ oraz $(0,0,1,1,1)$ są rozwiązaniami tego układu. Czy stąd wynika, że rozwiązaniem tego układu jest także $(a,a,a+b,b,b)$, jeżeli

a) $a=-5, \;\; b=6$;

b) $a=b=\dfrac{1}{2}$;

c) $a=b=\dfrac{1}{3}$;

d) $a=-7, \;\; b=6$?

17. Czy podana liczba jest wartością własną macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

a) 0 ;

b) 7 ;

c) 11 ;

d) 5 ?

18. W urnie jest 10 kul z kolejnymi liczbami od 0 do 9. Dwukrotnie losujemy z urny kulę (ze zwracaniem). Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że iloczyn liczb uzyskanych w obu losowaniach jest równy n. Czy wtedy

a) $P(16) = 0{,}04$;

b) $P(4) = 0{,}02$;

c) $P(36) = 0{,}03$;

d) $P(0) = 0{,}19$?

19. Rzucono dwoma kostkami do gry. Okazało się, że suma liczb oczek wyrzuconych na obu kostkach jest większa od 4. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem warunkowym, że suma liczb oczek wyrzuconych na obu kostkach jest równa n. Czy wtedy

a) $P(10) = 1/10$;

b) $P(8) = 1/9$;

c) $P(7) = 1/5$;

d) $P(6) = 1/6$?

20. Czy dla podanej liczby n, można umieścić w urnie n kul tak, aby spełnione były następujące warunki:

• każda kula znajdująca się w urnie jest biała albo czarna, przy czym w urnie jest co najmniej jedna kula biała i co najmniej jedna kula czarna,

• na każdej kuli znajdującej się w urnie napisana jest liczba 0 albo 1, przy czym w urnie jest co najmniej jedna kula z liczbą 0 i co najmniej jedna kula z liczbą 1,

• wylosowanie każdej kuli jest jednakowo prawdopodobne,

• przy losowaniu jednej kuli z urny, zdarzenia **wylosowana kula jest biała** oraz **na wylosowanej kuli jest liczba 1** są niezależne

a) $n = 23$;

b) $n = 25$;

c) $n = 26$;

d) $n = 29$?