

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24 czerwca 2013
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozwiąż następujące zagadnienie programowania liniowego:

Zminimalizować
przy ograniczeniach

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 = 6$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0.$$

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP) oraz hipoteza jednostajności (HU). Ponadto wiadomo, że $p_{40} = 0.9$ oraz $p_{41} = 0.8$.

- (a) Oblicz $p_{40.5}$. Wynik podaj z dokładnością do *trzech* miejsc dziesiętnych.
- (b) Zakładając dodatkowo, że roczna efektywna stopa procentowa $i = 0.1$, oblicz jednorazową składkę netto renty dla 40-latka, w której wypłaty 1000 PLN następują na koniec każdego półrocza, przez 2 lata od momentu podpisania umowy, pod warunkiem, że ubezpieczony żyje.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24 czerwca 2013
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** (8 punktów)

Dla danej macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 & -4 \\ 8 & 13 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. wyznaczyć (rozkład Choleskiego, czyli) macierz dolnie trójkątną L o własności:

$$A = LL^T;$$

2. sprawdzi, czy macierz L jest dodatnio określona.

3. udowodnić, że jeżeli $\det(A) \neq 0$ oraz $A = LL^T$, to macierz A jest dodatnio określona.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech będzie dany następujący program napisany w C++

```
#include <iostream>

class Cabc {
public:
    Cabc(int _n) { n = _n; }

    void a(int &S) { if( n%2 ) throw "A"; S += 1; }
};

int main() { Cabc *abc; int S=0;

for(int i=1; i<=7; ++i) {

abc = new Cabc(i); try { abc->a(S); std::cout << "B "; }

catch(const char *msg) { std::cout << msg << ' '; S += 10; }

delete abc; }

std::cout << "\nS: " << S << std::endl; return 0;

}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie komputera w wyniku działania programu?
2. Narysować schemat blokowy działania programu.
3. Napisać program w C realizujący w prostszy sposób przedstawione zadanie.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24 czerwca 2013
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1.** (8 punktów)

Mamy dany czworokąt wpisany w okrąg. Obliczyć miary kątów przy wierzchołkach wiedząc, że przedłużenia przeciwległych boków przecinają się pod kątami 30° i 50° .

Zadanie **2.** (8 punktów)

Liczba n przy dzieleniu przez 341 oraz przez 116 daje taką samą resztę równą 45. Jaka resztę daje n przy dzieleniu przez 22?

Zadanie **3.** (8 punktów)

Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznacz prostą regresji **przechodzącą przez punkt $(0,0)$** , czyli początek układu współrzędnych. Następnie na podstawie $(1,1), (3,7), (5,9)$, realizacji trzeylementowej próby losowej

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), (x_3, Y_3),$$

podaj wartość współczynnika kierunkowego tak wyznaczonej prostej regresji.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że Σ jest σ -ciałem podzbiorów X . Dla ustalonego $B \in \Sigma$ niech

$$\Sigma_B = \{A \cap B : A \in \Sigma\}.$$

Czy Σ_B jest σ -ciałem podzbiorów B ?

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz następującą całkę, dla $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{|z+1|=1} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^{n+1}} dz.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24 czerwca 2013
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozłóż wielomian $x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 14x^2 + 2x + 4$ na czynniki nierozkładalne nad \mathbb{Q} .

Zadanie **2.** (8 punktów)

Pewna izometria trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej ma następującą własność: każdy punkt jest odległy od swego obrazu o mniej niż 100. Udowodnij, że izometria ta jest translacją.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech $a_n \in \mathbb{R}$ oraz niech $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Pokazać, że wtedy zbiorem punktów skupienia ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest cały odcinek $[a, b]$, gdzie

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oraz} \quad b = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że Σ jest σ -ciałem podzbiorów X . Dla ustalonego $B \in \Sigma$ niech

$$\Sigma_B = \{A \cap B : A \in \Sigma\}.$$

Czy Σ_B jest σ -ciałem podzbiorów B ?

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz następującą całkę, dla $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{|z+1|=1} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^{n+1}} dz.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24 czerwca 2013
Zastosowania

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech U_1, U_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Niech

$$S_n = \log \prod_{j=1}^n U_j.$$

Napisz prawo wielkich liczb oraz centralne twierdzenie graniczne dla S_n . Uzasadnij wyniki powołując się na twierdzenia z wykładu. Podaj jawnie stałe normujące.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech $B_1(t)$ i $B_2(t)$ będą dwoma niezależnymi ruchami Browna. Znajdź wszystkie a dla których proces $X(t) = aB_1(t) + B_2(at)$ jest także ruchem Browna.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech (X_1, X_2) będzie próbą losową rozmiaru 2 z rozkładu jednostajnego $(2\theta, 3\theta)$, gdzie $\theta > 0$.

- Znajdź metodą momentów estymator parametru θ .
- Znajdź estymator największej wiarygodności parametru θ .

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że Σ jest σ -ciałem podzbiorów X . Dla ustalonego $B \in \Sigma$ niech

$$\Sigma_B = \{A \cap B : A \in \Sigma\}.$$

Czy Σ_B jest σ -ciałem podzbiorów B ?

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz następującą całkę, dla $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{|z+1|=1} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^{n+1}} dz.$$