EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)

13 lutego 2013 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(6+(-1)^n)^n}\,.$$

Zadanie **2.** Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1000}}\,dy\,dx\,.$$

Zadanie **3.** Znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = y(t). \end{cases}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Zadanie **4.** Dane są macierze kwadratowe A, B rozmiaru 5×5 spełniające następujące warunki:
1° Wektor $(1, 10, 100, 1000, 10000)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej 1.
2° Wektor $(0, 1, 2, 3, 4)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej -1.
3° Wektor $(1, 11, 102, 1003, 10004)$ jest wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej 1.
4° Wektor $(1, 9, 98, 997, 9996)$ jest wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej 4.

Podać (wraz z uzasadnieniem poprawności) przykład niezerowego wektora własnego macierzy AB i odpowiadającej mu wartości własnej.

Zadanie **5.** Rozstrzygnąć, czy istnieje skończona grupa nieabelowa (nieprzemienna) oraz takie jej elementy a, b rzędu 2, że element ab ma rząd większy od 2.

Zadanie **6.** Do egzaminu licencjackiego przystępuje n studentów, z których trzynastu cierpi na triskaidekafobię. Przed egzaminem zostaje wywieszona lista studentów, uporządkowanych w losowej kolejności. Interesuje nas wartość oczekiwana liczby par studentów cierpiących na triskaidekafobię, którzy zajmują na liście kolejne dwa miejsca. Dla której liczby n ta wartość oczekiwana jest równa 1?

Uwaga: Jeżeli trzech studentów cierpiących na triskaidekafobię zajmuje trzy kolejne miejsca, powiedzmy o numerach k, $k+1$, $k+2$, to tym samym tworzą oni dwie pary spełniające warunki zadania: $(k, k+1)$ oraz $(k+1, k+2)$.

Zadania 2, 4 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.