Wersja testu **A** 14 września 2012 r.

1. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a ponadto $f(0)=0$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność $f(x)>0$. Czy stąd wynika, że

a) $\underset{x>0}{\forall}\ f'(x)>0$;

b) $\underset{x>0}{\exists}\ f'(x)>0$;

c) $\underset{x<1}{\exists}\ f'(x)>0$;

d) $\underset{x>1}{\exists}\ f'(x)>0$?

2. Niech

$$C(a,b)=\int\limits_a^b \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

oraz niech

$$E(a,b)=e^{C(a,b)}\,.$$

Czy przy powyższych oznaczeniach podana liczba jest całkowita

a) $E(3,7)$;

b) $E(2,3)$;

c) $E(1,2)$;

d) $E(1,7)$?

3. Czy równość

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}=e^{a+b}$$

jest prawdziwa dla

a) $a=3, \quad b=3/2$;

b) $a=2, \quad b=2$;

c) $a=5, \quad b=5/4$;

d) $a=4, \quad b=3/4$?

4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że ciąg (a_n) wyrazów tego szeregu jest **zbieżny**, jeżeli

a) $S>1$;

b) $S=0$;

c) $0<S<1$;

d) $S=1$?

5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że ciąg (a_n) wyrazów tego szeregu jest **rozbieżny**, jeżeli

a) $S=0$;

b) $S=1$;

c) $0<S<1$;

d) $S>1$?

6. Czy szereg potęgowy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^n}$ jest zbieżny dla

a) $x=\pi$;

b) $x=3$;

c) $x=2$;

d) $x=5/2$?

7. Czy funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem ma lokalne minimum w punkcie $(0,0)$

a) $f(x,y)=x^2-2xy+6y^2$;

b) $f(x,y)=x^2+3xy+6y^2$;

c) $f(x,y)=x^2+5xy+6y^2$;

d) $f(x,y)=x^2-4xy+6y^2$?

8. Czy podany obszar płaski zdefiniowany we współrzędnych kartezjańskich (x,y) poprawnie zapisano we współrzędnych biegunowych (r,φ), gdzie $x=r\cdot\cos\varphi,\ \ y=r\cdot\sin\varphi,\ \ r\geqslant 0,\ \ -\pi<\varphi\leqslant\pi$

a) $\{(x,y): x<y\},\quad \left\{(r,\varphi):\ r>0\ \wedge\ -\dfrac{3\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{4}\right\}$;

b) $\{(x,y): x\geqslant 1\},\quad \left\{(r,\varphi):\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\ \wedge\ r\geqslant\dfrac{1}{\cos\varphi}\right\}$;

c) $\{(x,y): |y|<x\},\quad \left\{(r,\varphi):\ r>0\ \wedge\ -\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{4}\right\}$;

d) $\{(x,y): x>0\},\quad \left\{(r,\varphi):\ r>0\ \wedge\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$?

9. Dla dowolnej liczby zespolonej z prawdziwa jest implikacja

$$|z|=a\ \Rightarrow\ \operatorname{Re}z\leqslant 2a-1\,.$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $a=\log_4\left(\sqrt{53}-3\right)$;

b) $a=\log_4\left(\sqrt{23}-3\right)$;

c) $a=\log_4\left(\sqrt{13}-3\right)$;

d) $a=\log_4\left(\sqrt{43}-3\right)$?

10. Czy zbiór $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem, jeżeli

a) $n=29$;

b) $n=25$;

c) $n=21$;

d) $n=23$?

11. Czy podany zbiór z mnożeniem modulo 21 jest grupą

a) $\{15\}$;

b) $\{3\}$;

c) $\{6\}$;

d) $\{7\}$?

12. Czy istnieje grupa oraz taki jej element g spełniający warunek $g^{30} = e$, że rząd g jest równy

a) 20 ;

b) 40 ;

c) 60 ;

d) 10 ?

13. Czy istnieje grupa oraz taki jej element g rzędu 30, że

a) $g^{20} = e$;

b) $g^{60} = e$;

c) $g^{10} = e$;

d) $g^{40} = e$?

14. Czy podany wektor jest prostopadły do wektora (1,1,1)

a) $(2, -7, 5)$;

b) $(2, 3, 5)$;

c) $(-8, 3, 5)$;

d) $(-8, -7, 5)$?

15. Czy istnieje taka wartość rzeczywista parametru p, że podany wektor jest wektorem własnym macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $(1, 0, 3)$;

b) $(0, 5, 0)$;

c) $(1, 2, 0)$;

d) $(0, 2, 3)$?

16. Czy podana liczba jest wartością własną macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a) 7;
b) 3;
c) 1;
d) 5?

17. Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych na poszczególnych kostkach jest równy n. Czy wtedy
a) $P(3)=P(5)$;
b) $P(3)=P(9)$;
c) $P(4)=P(9)$;
d) $P(1)=P(27)$?

18. Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych na poszczególnych kostkach jest równy n. Czy wtedy
a) $P(6)=1/36$;
b) $P(4)=1/36$;
c) $P(12)=1/18$;
d) $P(15)=1/36$?

19. Dysponujemy fałszywymi monetami, które przy rzucie dają orła z prawdopodobieństwem $1/3$ i reszkę z prawdopodobieństwem $2/3$. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że przy rzucie n takimi monetami wypadnie co najwyżej jeden orzeł. Czy liczba $1/P(n)$ jest całkowita, jeżeli

a) $n=40$;

b) $n=27$;

c) $n=25$;

d) $n=13$?

20. Dysponujemy fałszywymi monetami, które przy rzucie dają orła z prawdopodobieństwem $2/3$ i reszkę z prawdopodobieństwem $1/3$. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że przy rzucie n takimi monetami wypadnie co najwyżej jeden orzeł. Czy liczba $1/P(n)$ jest całkowita, jeżeli

a) $n=13$;

b) $n=25$;

c) $n=27$;

d) $n=40$?