EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.09.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Sprawdź, czy wektor $x^0 = (0,0,3,3)$ jest optymalnym rozwiązaniem zagadnienia programowania liniowego:

Zminimalizować $\quad 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4,$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 21 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

$$x_i \geqslant 0.$$

(a) Jeśli odpowiedź jest pozytywna, to sprawdź, czy x^0 jest jedynym rozwiązaniem optymalnym.

(b) Jeśli x^0 nie jest rozwiązaniem optymalnym, to znajdź rozwiązanie optymalne.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$, dla $0 \leqslant x \leqslant 100$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

1) Obliczyć JSN dla następującej renty (60)-latka: jeśli żyje on pod koniec drugiego roku wypłata (na koniec drugiego roku) wynosi 20, jeśli żyje pod koniec trzeciego roku wypłata (na koniec trzeciegiego roku) wynosi 30. Przyjąć stopę procentową $i = 50\%$.

2) Rozpatrzmy dwie osoby, A i B, w wieku 30 lat. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że umarły one przed ukończeniem 70-tego roku życia, pod warunkiem, że osoba A dożyła 40 lat, a osoba B dożyła 60 lat. Zakładamy niezależność długości trwania życia tych osób.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Zmienna $Y(t)$ ma w chwili t rozkład normalny $N(\beta t, \sigma^2)$ ze znanym σ i nieznanym β. W celu oszacowania parametru β zmierzono Y w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Zakładając, że pomiary te są niezależne i mają wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$, wyznaczyć estymator najmniejszych kwadratów $\hat{\beta}$ dla współczynnika β. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(|\hat{\beta} - \beta| < \frac{\sigma}{10})$, jeżeli $\sum\limits_{t=0}^{n} t_i^2 = 100$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdź, że $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią metryczną dla

$$d(x,y) = \min(1, |x - y|).$$

Co możesz powiedzieć o zupełności i ośrodkowoci tej przestrzeni?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Wszystkie wartości funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leżą na ustalonej prostej. Udowodnij, że f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.09.2012
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dany jest program:

```
#include <string.h>

const char *s1="Egzamin"; const int p=5;

int main() {
   int i,q,n=strlen(s1);
   char s2[17];

   printf("n: %i\n", n);
   for(q=1; (p*q)%n!=1; ++q)
      ;
   printf("q: %i\n", q);
   s2[0] = 'E';
   for(i=1; i<n; ++i)
      s2[i] = s1[(i*p)%n];
   s2[n] = '\0';
   printf("%s\nE", s2);
   for(i=1; i<n; ++i)
      printf("%c", s2[(i*q)%n]);
   return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Dlaczego wartość zmiennej q zostanie wyznaczona jednoznacznie ?
3. Jakimi własnościami arytmetyki modularnej można uzasadnić otrzymany wynik ?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Uzasadnić, że dla wielomianu Czebyszewa T_n, jeżeli liczba x_0 spełnia $T_n(x_0) = 0$ oraz $n|m$, to również zachodzi $T_m(x_0) = 0$.

Zadania **3, 4, 5.**
Takie same, jak dla specjalności *Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach* .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.09.2012
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Udowodnić, że jeśli X jest punktem wewnętrznym trójkąta to suma odległości X od wszystkich trzech wierzchołków jest mniejsza od obwodu, a większa od połowy obwodu.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Udowodnić, że jeśli liczby całkowite x,y,z są względnie pierwsze i spełniają równanie

$$x^2+2y^2=z^2$$

to y jest parzyste a x,z są nieparzyste.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Zmienna $Y(t)$ ma w chwili t rozkład normalny $N(\beta t,\sigma^2)$ ze znanym σ i nieznanym β. W celu oszacowania parametru β zmierzono Y w chwilach $t_1,t_2,\dots,t_n$. Zakładając, że pomiary te są niezależne i mają wartości $y_1,y_2,\dots,y_n$, wyznaczyć estymator najmniejszych kwadratów $\hat{\beta}$ dla współczynnika β. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(|\hat{\beta}-\beta|<\frac{\sigma}{10})$, jeżeli $\sum_{t=0}^{n} t_i^2=100$.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, że $(\mathbb{R},d)$ jest przestrzenią metryczną dla

$$d(x,y)=\min(1,|x-y|).$$

Co możesz powiedzieć o zupełności i ośrodkowoci tej przestrzeni?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Wszystkie wartości funkcji holomorficznej $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ leżą na ustalonej prostej. Udowodnij, że f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.09.2012
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Znajdź rozkłady wielomianu x^6-17 na wielomiany nierozkładalne nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Jaką największą liczbę wektorów można umieścić w R^n tak, by wszystkie kąty między nimi były rozwarte?

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $D_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, gdzie f jest funkcją $[0,1] \to R$ oraz $0 \leqslant x \leqslant 1-h$. Pokazać, że dla $0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{n}$ zachodzi oszacowanie:

$$|D_h^n f(0)| \leqslant 2^n \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$$

gdzie D_h^n oznacza n-tą iteracje operatora D_h.
Oznaczmy przez P_n zbiór wielomianów stopnia $\leqslant n-1$. Pokazać, że D_h^n anihiluje P_n oraz wyprowadzić wzór na działanie D_h^n na funkcji wykładniczej.
Posługując się operatorami D_h udowodnić oszacowanie

$$\inf_{W \in P_n} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |W(x) - \exp(x)| \geqslant C(2n)^{-n}$$

Czy można uzyskać podobne jakościowo oszacowanie z góry?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, że $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią metryczną dla

$$d(x,y) = \min(1, |x-y|).$$

Co możesz powiedzieć o zupełności i ośrodkowoci tej przestrzeni?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Wszystkie wartości funkcji holomorficznej $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leżą na ustalonej prostej. Udowodnij, że f jest stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.09.2012
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech X_n,Y_n będą wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\chi^2(n)$ oraz $\mathcal{N}(n,n)$ (wariancja wynosi n) odpowiednio. Zbadać zbieżność ilorazu

$$\frac{X_n}{Y_n}$$

gdy $n \to \infty$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dla procesu Poissona N_t z intensywnością 1 oraz dla $s > t$ znajdź $v(n) = E[N_s|N_t = n]$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1,\ldots,X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkadzie $B(\alpha;1)$ i gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \alpha = 1$ przy alternatywie $H_1 : \alpha > 1$ testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności $p = 0{,}05$. Wyznacz jego moc przy $\alpha = 3$ jeśli ${\chi^2_{12}}^{-1}(0{,}05) = 5{,}23$ oraz $\chi^2_{12}(3 \times 5{,}23) = 0{,}79$, gdzie $\chi^2_{12}(\cdot)$ oznacza dystrybuantę rozkładu χ^2_{12}.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Sprawdź, że $(\mathbb{R},d)$ jest przestrzenią metryczną dla

$$d(x,y) = \min(1,|x-y|).$$

Co możesz powiedzieć o zupełności i ośrodkowoci tej przestrzeni?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Wszystkie wartości funkcji holomorficznej $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leżą na ustalonej prostej. Udowodnij, że f jest stała.