

1. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a ponadto dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f'(x)| < 2$. Czy stąd wynika, że

- a) $|f(1) - f(4)| < 2$;
- b) $|f(1) - f(4)| < 3$;
- c) $|f(1) - f(4)| < 6$;
- d) $|f(1) - f(4)| < 8$?

2. Niech

$$C(a, b) = \int_a^b \frac{3x+2}{x^2+x} dx$$

oraz niech

$$E(a, b) = e^{C(a, b)}.$$

Czy przy powyższych oznaczeniach podana liczba jest całkowita

- a) $E(5, 9)$;
- b) $E(3, 8)$;
- c) $E(3, 6)$;
- d) $E(2, 6)$?

3. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\int_0^2 \sqrt[3]{x^3+64} dx < 8$;
- b) $\int_0^2 \sqrt{x^2+64} dx < 10$;
- c) $\int_0^2 \sqrt[6]{x^6+64} dx < 4$;
- d) $\int_0^2 \sqrt[4]{x^4+64} dx < 6$?

4. Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna dana jest wzorem $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, a ponadto

- a) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ oraz $f(1) = -1$;
- b) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ oraz $f(1) = 1$;
- c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ oraz $f(1) = 3$;
- d) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ oraz $f(1) = 2$?

5. Czy całka niewłaściwa $\int_0^1 \frac{x^p}{x^3+1} dx$ jest zbieżna dla

- a) $p = \log_2(\sqrt{2}-1)$;
- b) $p = \log_2(\sqrt{17}-1)$;
- c) $p = \log_2(\sqrt{7}-1)$;
- d) $p = \log_2(\sqrt{27}-1)$?

6. Czy całka niewłaściwa $\int_1^\infty \frac{x^p}{x^3+1} dx$ jest zbieżna dla

- a) $p = \log_2(\sqrt{27}-1)$;
- b) $p = \log_2(\sqrt{17}-1)$;
- c) $p = \log_2(\sqrt{2}-1)$;
- d) $p = \log_2(\sqrt{7}-1)$?

7. Czy implikacja $x^2 < 5 \Rightarrow x < 1$ jest prawdziwa dla

- a) $x = -4$;
- b) $x = -1$;
- c) $x = 5$;
- d) $x = 2$?

8. Czy poprawnie dokonano zmiany kolejności całkowania

a)
$$\int_0^1 \int_x^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy;$$

b)
$$\int_0^1 \int_0^{x^3} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x, y) dx dy;$$

c)
$$\int_{-1}^0 \int_x^{x^3} f(x, y) dy dx = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt[3]{y}}^y f(x, y) dx dy;$$

d)
$$\int_0^1 \int_{x^3}^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^y f(x, y) dx dy?$$

9. Czy nierówność $|z| \leq |z - 2 - 2i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 4012 - 4008i$;
- b) $z = 2012 - 2010i$;
- c) $z = 1012 - 1011i$;
- d) $z = 3012 - 3009i$?

10. Niech $R(m, n)$ będzie liczbą rozwiązań równania $z^m = z^n$ w liczbach zespolonych z (**UWAGA:** Każdą liczbę z spełniającą równanie liczymy jako jedno rozwiązanie niezależnie od krotności tej liczby jako pierwiastka wielomianu, który można otrzymać przekształcając dane równanie).

Czy wtedy

- a) $R(4, 12) = 10$;
- b) $R(3, 10) = 8$;
- c) $R(1, 5) = 5$;
- d) $R(2, 8) = 6$?

11. Czy zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem, jeżeli

- a) $n = 7$;
- b) $n = 4$;
- c) $n = 5$;
- d) $n = 6$?

12. Czy podany zbiór jest podgrupą grupy $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ z mnożeniem modulo 13

- a) $\{1, 12\}$;
- b) $\{1, 5, 12\}$;
- c) $\{1, 3, 9\}$;
- d) $\{1\}$?

13. Czy podany zbiór z mnożeniem modulo 15 jest grupą

- a) $\{3\}$;
- b) $\{10\}$;
- c) $\{1\}$;
- d) $\{6\}$?

14. Czy podany zbiór z mnożeniem modulo 15 jest grupą

- a) $\{3, 12\}$;
- b) $\{1, 14\}$;
- c) $\{3, 6, 9, 12\}$;
- d) $\{5, 10\}$?

15. Czy istnieje taka macierz kwadratowa o wyznaczniku 1, że wyznacznik macierzy otrzymanej przez przemnożenie wszystkich wyrazów tej macierzy przez 2 jest równy

- a) 4;
- b) 9;
- c) 6;
- d) 8?

16. Dany jest układ czterech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Wiadomo, że $(0, 1, 2)$ oraz $(2, 1, 0)$ są rozwiązaniami tego układu równań.

Czy stąd wynika, że podana trójka liczb jest rozwiązaniem układu równań

- a) $(-2, 1, 5)$;
- b) $(1, 1, 1)$;
- c) $(2, 2, 2)$;
- d) $(-1, 1, 3)$?

17. Dany jest układ czterech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Wiadomo, że $(0, 1, 2)$ oraz $(2, 1, 0)$ są rozwiązaniami tego układu równań, a $(0, 1, 0)$ **nie** jest jego rozwiązaniem.

Czy stąd wynika, że podana trójka liczb **nie** jest rozwiązaniem układu równań

- a) $(2, 2, 2)$;
- b) $(-1, 1, 3)$;
- c) $(-2, 1, 5)$;
- d) $(1, 1, 1)$?

18. Rzucamy jednokrotnie kostką do gry. Zdefiniujemy następujące zdarzenia losowe:

A - liczba wyrzuconych oczek jest parzysta.

B - liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3.

C - liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 5.

D - liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1.

Czy stąd wynika, że podane zdarzenia są niezależne

- a) A oraz D ;
- b) A oraz C ;
- c) B oraz D ;
- d) A oraz B ?

19. W urnie znajduje się $n-m+1$ kul ponumerowanych kolejnymi liczbami całkowitymi od m do n . Losujemy jedną kulę. Czy wartość oczekiwana liczby napisanej na wylosowanej kuli jest liczbą całkowitą, jeżeli

- a) $m = 16, n = 88$;
- b) $m = 9, n = 66$;
- c) $m = 4, n = 33$;
- d) $m = 1, n = 11$?

20. Mamy dwie urny z kulami. W pierwszej urnie znajduje się b_1 kul białych i c_1 kul czarnych. W drugiej urnie znajduje się b_2 kul białych i c_2 kul czarnych.

Rozważmy dwa sposoby przeprowadzenia losowania.

1° Wybieramy losowo (z równym prawdopodobieństwem) jedną z urn, a następnie losujemy z wybranej urny jedną kulę.

2° Wsypujemy wszystkie kule do jednej urny, a następnie losujemy z tej urny jedną kulę.

Czy w obydwu sposobach losowania prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest takie samo, jeżeli

- a) $b_1 = 1, c_1 = 2, b_2 = 2, c_2 = 4$;
- b) $b_1 = 1, c_1 = 4, b_2 = 2, c_2 = 5$;
- c) $b_1 = 1, c_1 = 6, b_2 = 2, c_2 = 6$;
- d) $b_1 = 1, c_1 = 8, b_2 = 2, c_2 = 7$?