EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
18.06.2012

Zadanie **1.** Podać przykład takiego ciągu liczb rzeczywistych dodatnich (a_n), że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny, a ponadto zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = z$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y,z) : x^2+y^2=z \ \wedge \ x^2+y^2+z^2=4z\right\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Rozwiązać następujący układ równań

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

a następnie znaleźć rozwiązanie tego układu spełniające warunki początkowe

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Zadanie **4.** Dane są macierze kwadratowe A, B rozmiaru 5×5 spełniające następujące warunki:
1° Wektor $(1, 10, 100, 1000, 10000)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej 1.
2° Wektor $(0, 1, 2, 3, 4)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej 4.
3° Wektor $(1, 11, 102, 1003, 10004)$ jest wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej 1.
4° Wektor $(1, 9, 98, 997, 9996)$ jest wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej 5.

Dowieść, że wektor $(2, 21, 202, 2003, 20004)$ jest wektorem własnym macierzy $A+B$. Wyznaczyć odpowiadającą mu wartość własną.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
Istnieje skończona grupa abelowa (przemienna) oraz takie jej elementy a, b rzędów odpowiednio 6 i 10, że element ab ma rząd n.

Zadanie **6.** Mamy 4 komplety filiżanek z podstawkami. Dwa komplety są w kolorze białym (filiżanka i podstawka), a dwa w czarnym. Filiżanki kładziemy losowo na podstawkach. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie tak powstałe zestawy są dwukolorowe (filiżanki w innym kolorze niż podstawki).

Zadania 4, 5 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.