

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **1.** (8 punktów)

Posługując się zagadnieniem dualnym i stosując odpowiednie kryterium sprawdź czy wektor $x^0 = (5, 0, 0, 0, 2)$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia programowania liniowego:

Zminimalizować $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5,$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \geq & 10 \\ & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & \geq & 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & + & 2x_4 & - & 2x_5 & \geq & 9 \end{array}$$

$$x_i \geq 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza de Moivre'a z $\omega = 100$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP). Rozpatrzmy grupę 2 osób w wieku 20 lat. Zakładamy, że długości trwania życia tych osób są wzajemnie niezależne.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że obie osoby przeżyją co najmniej 40 lat.
- b) Wyznaczyć JSN dla grupowej umowy ubezpieczenia dla dwóch 20-latków, w której wypłata 100 następuje w pierwszą rocznicę zawarcia umowy, gdy obaj ubezpieczeni żyją. W razie śmierci co najmniej jednego z ubezpieczonych przed ukończeniem 22-go roku życia, wypłata 200 następuje w drugą rocznicę zawarcia umowy. Stopa procentowa jest równa $i = 50\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwie niezależne próby proste $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ i $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{25})$ pochodzące z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 1)$ posłużyły do zbudowania dwóch standardowych 95% przedziałów ufności dla wartości oczekiwanej μ . Oblicz prawdopodobieństwo, że te przedziały będą rozłączne.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **1.** (8 punktów)

Posługując się zagadnieniem dualnym i stosując odpowiednie kryterium sprawdź czy wektor $x^0 = (5, 0, 0, 0, 2)$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia programowania liniowego:

Zminimalizować $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5,$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \geq & 10 \\ & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & \geq & 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & + & 2x_4 & - & 2x_5 & \geq & 9 \end{array}$$

$$x_i \geq 0.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza de Moivre'a z $\omega = 100$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP). Rozpatrzmy grupę 2 osób w wieku 20 lat. Zakładamy, że długości trwania życia tych osób są wzajemnie niezależne.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że obie osoby przeżyją co najmniej 40 lat.
- b) Wyznaczyć JSN dla grupowej umowy ubezpieczenia dla dwóch 20-latków, w której wypłata 100 następuje w pierwszą rocznicę zawarcia umowy, gdy obaj ubezpieczeni żyją. W razie śmierci co najmniej jednego z ubezpieczonych przed ukończeniem 22-go roku życia, wypłata 200 następuje w drugą rocznicę zawarcia umowy. Stopa procentowa jest równa $i = 50\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwie niezależne próby proste $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ i $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{25})$ pochodzące z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 1)$ posłużyły do zbudowania dwóch standardowych 95% przedziałów ufności dla wartości oczekiwanej μ . Oblicz prawdopodobieństwo, że te przedziały będą rozłączne.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech będzie dany układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases}$$

Dla podanego układu równań:

1. Napisać wzór rekurencyjny przybliżonego znajdowania rozwiązania metodą Jacobiego.
2. Podobnie, podać wzór rekurencyjny przybliżonego wyznaczania rozwiązania układu metodą Gaussa–Siedla.
3. Uzasadnić zbieżność ciągu w przypadku metody Jacobiego.
4. Startując z $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$, wyznaczyć wyrazy $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ w metodzie Gaussa–Siedla.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
const int q=2;
const int n=5;

int f(int n)
{
    n = -n;
    return q*n;
}

int g(int n)
{
    return -q*n;
}

int (*T[2])(int) = {f,g};

int main()
{
    int i,a=1,S=0;

    for(i=1; i<n; ++i)
    {
        S += a;
        printf("%i ", a);
        a = (*T[i%2])(a);
    }
    S += a;
    printf("%i\nS: %i\n", a, S);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Jaki wynik działania programu będzie dla $q = 3$?
3. Opisać wzorami matematycznymi otrzymane wyniki.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwie niezależne próby proste $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ i $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{25})$ pochodzące z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 1)$ posłużyły do zbudowania dwóch standardowych 95% przedziałów ufności dla wartości oczekiwanej μ . Oblicz prawdopodobieństwo, że te przedziały będą rozłączne.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **1.** (8 punktów)

Udowodnić, że długość dowolnego odcinka zawartego w trójkącie jest mniejsza niż długość najdłuższego boku.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **2.** (8 punktów)

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą to

$$n^7 - n$$

dzieli się przez 42.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwie niezależne próby proste $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ i $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{25})$ pochodzące z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 1)$ posłużyły do zbudowania dwóch standardowych 95% przedziałów ufności dla wartości oczekiwanej μ . Oblicz prawdopodobieństwo, że te przedziały będą rozłączne.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2]$. Wyznaczyć μ, σ tak aby

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\min(1, X_i) - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}$$

według rozkładu, gdy $n \rightarrow \infty$, gdzie \mathcal{N} ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Odpowiedź uzasadnić.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech X ma rozkład beta $B(p; p)$ ($p > 0$) z gęstością

$$f(x) = \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)^2} x^{p-1} (1-x)^{p-1}.$$

Na podstawie jednej obserwacji skonstruuj test jednostajnie najmocniejszy dla testowania hipotezy $H : p = p_0$ przeciwko hipotezie $K : p = p_1 > p_0$ na poziomie istotności $\alpha \in (0; 1)$. Wyznacz funkcję mocy tego testu dla $p \in \{p_0; p_1\}$. Przedstaw test i jego funkcję mocy w takiej postaci, aby możliwie najmniej wartości trzeba było odczytywać z tablic. W rozwiązaniu przyjmij następujące oznaczenie: $bp(x)$ dystrybuanta rozkładu $B(p; p)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

Zadanie **3.** (8 punktów)

Założmy, że $X_t, t \geq 0$, jest procesem startującym z zera, przyjmującym wartości całkowite nieujemne, o niezależnych, stacjonarnych przyrostach i prawostronnie ciągłych i niemalejących trajektoriach. Ponadto założmy, że

$$P(X_t = 1) = \lambda t + o(t), \quad P(X_t \geq 2) = o(t), \quad \text{przy } t \downarrow 0.$$

Wykaż, że X jest procesem Poissona.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Zastosowania

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

Zadanie **1.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie grupy rzędu 15. Podaj uzasadnienie, że nie ma innych.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

Zadanie **2.** (8 punktów)

Skonstruować funkcje klasy C^∞ zerającą się dokładnie na zbiorze Cantora.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

Zadanie **3.** (8 punktów)

Punkty A i B leżą na paraboli $y = x^2$. Na łuku AB tej paraboli wybrano punkt M tak, że pole trójkąta AMB jest największe możliwe. Udowodnij, że styczna do paraboli w punkcie M jest równoległa do odcinka AB .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

Zadanie **4.** (8 punktów)

Policz całkę Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda$, jeśli $[a, b] = [0, 10]$ oraz $f(x) = \sum_{k=0}^2 1_{[x, x+5)}(k)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 20.06.2012
Matematyka teoretyczna

96