

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie 1. (8 punktów)

Wiedząc, że wektor $x^0 = (0, 3, 0, 0, 4)$ jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia programowania liniowego:

zminimalizować

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

przy ograniczeniach

$$-3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 8$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 11$$

$$2x_1 + x_4 + 3x_5 \geq 12$$

$$x_i \geq 0,$$

- (a) sformułuj zagadnienie dualne do tego zagadnienia;
- (b) podaj optymalną wartość funkcji celu zagadnienia dualnego;
- (c) podaj rozwiązanie optymalne zagadnienia dualnego.

Zadanie 2. (8 punktów)

Założmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{110}$ dla $x \in [0, 110]$ oraz że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

- 1) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie dwóch 25-latków, co najmniej jeden przeżyje co najmniej dalszych 30 lat.
- 2) Wyznaczyć JSN dla czystego ubezpieczenia na życie na 3 lata dla osoby w wieku 40 lat. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$ oraz sumę ubezpieczenia równą 20000.

Zadanie 3. (8 punktów)

Zmienna X ma rozkład jednostajny na $(0, a)$. Dla n -elementowej próby prostej z tego rozkładu wyznaczyć test ilorazu wiarygodności na poziomie istotności 0.05 dla testowania hipotezy:

$$H_0 : a = 10,$$

$$H_1 : a < 10.$$

Jaką decyzję należy podjąć, gdy w próbie uzyskano wartości:

4.8, 5.0, 3.1, 3.8 ?

Zadanie 4. (8 punktów)

Pokaż, że jeżeli $E \subset \mathbb{R}$ i $\lambda(E) > 0$, to istnieją takie punkty $x, y \in E$, że $x - y \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 5. (8 punktów)

W oparciu o równania Cauchy'ego-Riemanna wyznacz funkcję holomorficzną $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wiedząc, że funkcja $u(x, y) = \operatorname{Re}(f)(x + iy)$ jest równa $x^2 - y^2 + xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Spróbuj także wyznaczyć f jako funkcję zmiennej z .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
int F(int a, int b, int &x, int &y)
{
    if( b==0 )
    {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
    }
    int d=F(b, a%b, x, y);
    int r=y;
    y = x-(a/b)*y;
    x =r;
    return d;
}

int main()
{
    int x,y, a,b,r;

    a = 7;
    b = 3;
    r = F(a, b, x, y);
    x = (x+a)%a;
    y = (y+a)%a;
    cout << "F(" << a << ', ' << b << "): " << r << endl;
    cout << "Dlaczego: " << a << " * " << x << " + " << b;
    cout << " * " << y << ((a*x+b*y-r)%a==0?" == ":" != ");
    cout << r%a << " ?" << endl;
    return 0;
}
```

Pytania (**UWAGA: Trzecie pytanie na odwrocie!!!**):

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ? Jakim faktem matematycznym można uzasadnić otrzymany wynik obliczeń ?
2. Do jakich własności liczb całkowitych odnosi się relacja == lub != jaka zostanie wyświetlona na ekranie ?

3. Co zostanie wyświetlone na ekranie, gdy w programie zamienimy przypisanie $b = 3$ na $b = 5$?

Zadanie 2. (8 punktów)

Dla określonego rekurencyjnie ciągu wielomianów:

$$T_n(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 0; \\ x, & \text{dla } n = 1; \\ 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), & \text{dla } 1 < n. \end{cases}$$

określamy zbiory: $Z_n \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in (-1, 1) : T_n(x) = 0\}$.

Pytania:

1. Ile elementów zawiera każdy ze zbiorów Z_n ?
2. Wypisać elementy zbioru Z_7 .
3. Jakie znaczenie mają zera wielomianów $T_n(x)$ dla interpolowania danej funkcji przy pomocy wielomianów ?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadania 3-5.

Jak dla specjalności *Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Matematyka nauczycielska

Zadanie 1. (8 punktów)

Dla naturalnego $n \geq 1$ wylicz sumę

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. (8 punktów)

Wykaż, że suma długości środkowych w trójkącie jest większa od połowy jego obwodu.

Zadania 3-5.

Jak dla specjalności *Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Matematyka teoretyczna

Zadanie 1. (8 punktów)

Podaj (z uzasadnieniem) ilość klas sprzężenia elementów S_5 .

Zadanie 2. (8 punktów)

Skonstruować funkcje klasy C^∞ zerującą się dokładnie na zbiorze Cantora.

Zadanie 3. (8 punktów)

Punkty A i B leżą na paraboli $y = x^2$. Na łuku AB tej paraboli wybrano punkt M tak, że pole trójkąta AMB jest największe możliwe. Udowodnij, że styczna do paraboli w punkcie M jest równoległa do odcinka AB .

Zadania 4-5.

Jak dla specjalności *Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Zastosowania

Zadanie 1. (8 punktów)

Rozpatrzmy ciąg prostokątów o bokach długości $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$, gdzie X_1, X_2, \dots mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$, Y_1, Y_2, \dots mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 4]$; wszystkie zmienne losowe są wzajemnie niezależne. Niech P_1, P_2, \dots będzie ciągiem pól tych prostokątów, a O_1, O_2, \dots ciągiem ich obwodów. Zbadać zbieżność

$$\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n O_i},$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2. (8 punktów)

Niech X ma funkcję gęstości

$$f_a(x) = \begin{cases} (1+a)x^a, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Testujemy $H_0 : a = 1$ przeciwko $H_1 : a = 2$. Dysponujemy pojedynczą obserwacją X . Wyznaczyć obszar krytyczny najmocniejszego testu o rozmiarze 0.1.

Zadanie 3. (8 punktów)

Niech $Z(t) = (X(t), Y(t))$ będzie dwuwymiarowym procesem, w którym X i Y są niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami λ i μ odpowiednio. Znajdź prawdopodobieństwo tego, że $Z(t)$ przetnie prostą $x' + y' = w$ dla ustalonego z góry w w punkcie (x, y) .

Zadania **4-5.**

Jak dla specjalności *Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 2.02.2012
Biomatematyka

Brak zdających.