Wersja testu **D** 31 stycznia 2012 r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{n\in\mathbf{Z}}\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{k\in\mathbf{Z}} \quad n^2 \leq m^2 + k^2$;

b) $\forall_{n\in\mathbf{Z}}\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{k\in\mathbf{Z}} \quad m^2 + k^2 \leq n^2$;

c) $\forall_{n\in\mathbf{Z}}\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{k\in\mathbf{Z}} \quad m^2 \leq n^2 + k^2$;

d) $\forall_{n\in\mathbf{Z}}\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{k\in\mathbf{Z}} \quad m^2 + n^2 \leq k^2$?

2. Czy jest liczbą wymierną

a) $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$;

c) $(\sqrt{2}-1)^9 - (\sqrt{2}+1)^9$;

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$?

3. Czy jest prawdą, że

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(n - (n+1)) = 1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = 1$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$?

4. Czy

a) $\lim_{n\to\infty} (1+n)^{1/n} = \frac{1}{e}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt{e}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = e$;

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} = \frac{1}{e^2}$?

5. Czy funkcja $f(x,y) = xy - a(x^2+y^2)$ ma w punkcie $(x,y) = (0,0)$

a) lokalne maksimum, jeśli $a = -1$;

b) lokalne maksimum, jeśli $a = 1$;

c) lokalne minimum, jeśli $a = 0$;

d) lokalne minimum, jeśli $a = 1/3$?

6. Czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0?$$

a) $y(t) = e^t$;

b) $y(t) = te^{-t}$;

c) $y(t) = \sin(t)$;

d) $y(t) = 2e^{-t}$.

7. Czy funkcja $f(x) = e^{-x} \sin x$

a) ma lokalne maksimum w $x = -\frac{3\pi}{4}$;

b) ma lokalne minimum w $x = \frac{3\pi}{2}$;

c) ma lokalne maksimum w $x = \frac{\pi}{4}$;

d) ma lokalne maksimum w $x = \frac{\pi}{2}$?

8. Niech $S = [0,1] \times [0,1]$. Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna?

a) $\int\int_S \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$;

b) $\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$;

c) $\int\int_S \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy$;

d) $\int\int_S \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

9. Czy istnieje nieskończenie wiele liczb zespolonych z spełniających równanie

a) $z = \overline{z} - 1$;

b) $z = \overline{z} + i$;

c) $z = \overline{z} - i$;

d) $z = \overline{z} + 1$?

10. Czy istnieje zespolony pierwiastek z jedynki z, taki że

a) $|z-(2+i)|<\sqrt{2}$;

b) $|z-(1+i)|\leq\sqrt{2}-1$;

c) $|z-(2+i)|<1$;

d) $|z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$?

11. Czy wielomian charakterystyczny podanej macierzy ma podwójny pierwiastek rzeczywisty?

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Macierz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ jest macierzą ortogonalną. Czy wynika stąd, że
a) $b = -c$;
b) $a^2 + b^2 = 1$;
c) $a + d \leq 2$;
d) $ad - bc = 1$?

13. O macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ wiadomo, że jej wartościami własnymi są liczby 1, 2, 3, a wektory $(1, 1, -1)$ i $(-1, 1, 1)$ są jej wektorami własnymi.
a) Czy wektor $(1, 1, 1)$ może być wektorem własnym A ;
b) Czy wektor $(1, 0, 1)$ musi być wektorem własnym A ;
c) Czy wektor $(1, -1, -1)$ musi być wektorem własnym A ;
d) Czy wektor $(0, 1, 0)$ może być wektorem własnym A ?

14. Pewna macierz rozmiaru 4×4 ma rząd 2. Czy wynika stąd, że
a) każde jej dwie kolumny są liniowo niezależne ;
b) pewne jej dwie kolumny są liniowo niezależne ;
c) jej wyznacznik jest równy 0 ;
d) każde jej trzy wiersze są liniowo zależne ?

15. Czy w grupie odwracalnych macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych jest element rzędu

a) 4 ;

b) 5 ;

c) 2 ;

d) 3 ?

16. Czy w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbf{Z}$

a) liczba 4 należy do dokładnie 2 ideałów właściwych (tj. różnych od $\mathbf{Z}$) ;

b) liczba 12 należy do dokładnie 5 ideałów właściwych (tj. różnych od $\mathbf{Z}$) ;

c) liczba 12 należy do dokładnie 2 ideałów maksymalnych ;

d) liczba 12 należy do dokładnie 2 ideałów pierwszych ?

17. [Uwaga: $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$]
Czy istnieje podciało K ciała liczb zespolonych $\mathbf{C}$, takie że

a) $\mathbf{R} \subset K \subset \mathbf{C}$;

b) $K \subset \mathbf{Q}$;

c) $K \not\subseteq \mathbf{R}$ i $\mathbf{R} \not\subseteq K$;

d) $\mathbf{Q} \subset K \subset \mathbf{R}$?

18. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2012\}$ (każdą z tym samym prawdopodobieństwem). Niech D_p oznacza zdarzenie: wylosowana liczba jest podzielna przez p. Czy

a) $P(D_3|D_2) = 1/3$;

b) $P(D_2|D_5) = 1/5$;

c) $P(D_5|D_2) = 1/2$;

d) $P(D_2|D_3) = 1/2$?

19. Współczynniki wielomianu $Q(X)$ stopnia 13 są wszystkie równe ± 1, przy czym znaki ustalono przez 14 niezależnych rzutów monetą (orzeł: $+$, reszka: $-$). Czy

a) $P(Q(2) > 0) = P(Q(2) < 0)$;

b) $E(Q(2)) = 0$;

c) $P(Q(2) + Q(-2) = 0) = 1/2$;

d) $P(Q(2) > 0) = P(Q(-2) > 0)$?

20. Rzucono trzema kostkami do gry; niech Π będzie iloczynem liczb wyrzuconych oczek. Czy

a) $P(\Pi \text{ jest parzyste}) = P(\Pi \text{ jest nieparzyste})$;

b) $P(\Pi \geq 125) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$;

c) $E(\Pi) = (3\frac{1}{2})^3$;

d) $P(\Pi = 125) = (\frac{1}{6})^3$?