Wersja testu **D** 14 września 2011 r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\exists_{y\in\mathbf{Z}} \quad y^2 = 2$;

b) $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\exists_{y\in\mathbf{Z}} \quad x^2 = 1$;

c) $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\exists_{y\in\mathbf{Z}} \quad x^2 = 2$;

d) $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\exists_{y\in\mathbf{Z}} \quad y^2 = 1$?

2. Czy prawdą jest, że

a) $5^8 - 1$ jest podzielne przez 4 ;

b) $5^7 - 1$ jest podzielne przez 4 ;

c) $3^7 - 1$ jest podzielne przez 4 ;

d) $3^8 - 1$ jest podzielne przez 4 ?

3. Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^3}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$?

4. Trzykrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia dla $x \in [3,4]$ nierówność $f'(x) \cdot f''(x) < 0$. Czy prawdą jest, że:

a) Jeśli f jest wypukła w przedziale $(3,4)$, to $f(3) < f(4)$;

b) Jeśli f jest wypukła w przedziale $(3,4)$, to $f(3) > f(4)$;

c) Jeśli $f(3) < f(4)$, to f jest wypukła w przedziale $(3,4)$;

d) Jeśli $f(3) > f(4)$, to f jest wypukła w przedziale $(3,4)$?

5. Niech $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Czy jest prawdą, że

a) f ma lokalne minimum w $x = 0$;

b) f ma lokalne minimum w $x = \sqrt{\pi}$;

c) $f'(2) < 0$;

d) $f'(-2) < 0$?

6. Czy jest prawdą, że dowolny wielomian stopnia 6 (o współczynnikach rzeczywistych, traktowany jako funkcja z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$)

a) ma co najwyżej 5 ekstremów lokalnych ;

b) ma co najwyżej 2 maksima lokalne ;

c) ma co najmniej jedno lokalne ekstremum ;

d) ma co najwyżej 3 minima lokalne ?

7. Czy podany ciąg funkcji jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1/2]$?

a) $f_n(x) = \frac{1}{2^n} x^n$;

b) $f_n(x) = nx^n$;

c) $f_n(x) = 2^n x^n$;

d) $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$.

8. Czy pole półkola o promieniu 1 jest równe wartości podanej całki?

a) $\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\, dx$;

b) $\int_0^\pi \int_0^1 1\, dr\, d\theta$;

c) $\int_0^\pi \int_0^1 r\, dr\, d\theta$;

d) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dx\, dy$.

9. Niezerowe liczby zespolone z, w spełniają warunki: $z^5 = w$, $w^5 = z$. Czy wynika stąd, że

a) $(\overline{w})^{24} = 1$;

b) $z = w$;

c) $z^{48} = 1$;

d) $\mathrm{Re}(zw) \cdot \mathrm{Im}(zw) = 0$?

10. Czy wielomian $x^3 + x + 1$

a) ma pierwiastek nierzeczywisty ;

b) ma pierwiastek rzeczywisty ;

c) ma pierwiastek potrójny ;

d) ma pierwiastek podwójny ?

11. Czy podany wektor jest wektorem własnym macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}?$$

a) $(0,1,1)$;

b) $(0,0,1)$;

c) $(1,0,0)$;

d) $(0,1,0)$.

12. Macierz A rozmiaru 2×2 jest macierzą ortogonalną. Czy wynika stąd, że podana macierz jest ortogonalna?

a) $AA^\top A^{-1}$;

b) $A^{-1}A^\top$;

c) $AA^\top$;

d) $A^\top$.

13. O wektorach $u, v \in \mathbf{R}^3$ wiadomo, że $u \times v = (0, 0, 1)$. Czy wynika stąd, że

a) $u = (1, 0, 0)$;

b) $v = (a, b, 0)$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$;

c) $v = (0, b, 0)$ dla pewnego $b \in \mathbf{R}$;

d) Iloczyn skalarny $u \circ (0, 0, 1)$ jest równy 0 ?

14. Macierz M rozmiaru 5×6 ma rząd 2. Czy wynika stąd, że

a) każda kolumna M jest kombinacją liniową pewnych dwóch innych kolumn M ;

b) pewna kolumna M jest kombinacją liniową pewnych dwóch innych kolumn M ;

c) pewna kolumna M jest krotnością pewnej innej kolumny M ;

d) każda kolumna M jest krotnością pewnej innej kolumny M ?

15. Czy może się zdarzyć, że w nieskończonej grupie

a) każdy nietrywialny element ma rząd 4 ;

b) każdy nietrywialny element ma rząd 3 ;

c) każdy nietrywialny element ma skończony rząd ;

d) każdy nietrywialny element ma rząd 2 ?

16. Czy w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbf{Z}$

a) jest tylko jeden element odwracalny ;

b) każdy niezerowy element jest odwracalny ;

c) jest nieskończenie wiele ideałów ;

d) są dzielniki zera ?

17. Czy jest prawdą, że w dowolnym ciele K

a) nie istnieje $x \in K$, takie że $x^2 = -1$;

b) $\forall_{x \in K} \quad (-x)^2 = x^2$;

c) $1 + 1 \neq 0$;

d) $\exists_{x \in K} \quad x^2 = 1$?

18. Punkt X wybrano losowo (z rozkładem jednostajnym) z kwadratu $ABCD$. Niech a, b, c, d oznaczają odpowiednio odległości punktu X od wierzchołków A, B, C, D. Czy

a) zdarzenia $[a > b]$ i $[a > d]$ są niezależne ;

b) zdarzenia $[a > b]$ i $[c > d]$ są niezależne ;

c) zdarzenia $[a > c]$ i $[b > d]$ są niezależne ;

d) zdarzenia $[a > b]$ i $[a > c]$ są niezależne ?

19. Rzucamy jednocześnie trzema monetami: 1 zł (po jednej stronie cyfra 1, po drugiej orzeł), 2 zł (po jednej stronie cyfra 2, po drugiej orzeł) i 1 euro (po jednej stronie cyfra 1, po drugiej motyw niebędący orłem). Niech n_0 będzie liczbą wyrzuconych orłów, n_1 – jedynek, n_2 – dwójek. Czy

a) $P[\max(n_0, n_1, n_2) = 1] = 1/2$;

b) $P[n_1 > n_2] = 1/2$;

c) $P[n_0 > n_1] = 1/2$;

d) $P[\min(n_0, n_1, n_2) = 1] = 1/2$?

20. W urnie znajduje się 2011 kul ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 2011. Losujemy (bez zwracania) k kul. Niech S_k oznacza sumę liczb na wylosowanych kulach. Czy wtedy

a) $P[S_{10} < 50] < 10^{-5}$;

b) $P[S_1 > 2000] > 0{,}005$;

c) $E[S_{100}] > 10^5$;

d) $E[S_2] = 2011$?